Magnetische Resonanzen in einem durch longitudinales optisches Pumpen ausgerichteten System von ^{201}Hg-Atomen

INAUGURAL-DISSERTATION
zur
Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Philipps-Universität Marburg/Lahn

Vorgelegt von
Ludwig Dellit
aus Kassel

Marburg/Lahn 1969

E. Symon · Foto-Druck · 355 Marburg/L. · Friedrichsstr. 3

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534905_0092

Magnetische Resonanzen in einem durch longitudinales optisches Pumpen ausgerichteten System von ^{201}Hg-Atomen

INAUGURAL-DISSERTATION
zur
Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Philipps-Universität Marburg/Lahn

Vorgelegt von
Ludwig Dellit
aus Kassel

Marburg/Lahn 1969

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Philipps-Universität Marburg/Lahn

als Dissertation angenommen am 20.Januar 1969
Tag der mündlichen Prüfung am 5. Februar 1969

Berichterstatter: Dozent Dr.U.Cappeller
Mitberichterstatter: Prof.Dr.S.Großmann

Inhaltsverzeichnis.

		Seite
	Einleitung.	4
A.)	Theoretische Grundlagen.	12
A.1)	Die Bewegungsgleichungen.	12
A.1.1)	Die allgemeine Form der Bewegungsgleichungen.	12
A.1.2)	Die Bewegungsgleichungen im Falle eines longitudinalen optischen Pumpens von ^{201}Hg ($^1S_0(I=3/2) \rightarrow {}^3P_1(F=3/2)$) mit unpolarisiertem Licht.	15
A.1.3)	Die Bewegungsgleichungen der Alignment-Komponenten für harmonische Wechselfelder. Resonanz im Grundzustand.	18
A.2)	Die stationären Lösungen der Bewegungsgleichungen der Alignment-Komponenten im Fall eines schwachen magnetischen Wechselfeldes.	23
A.2.1)	Die Reduktion auf die Bewegungsgleichungen für die Alignment-Komponenten des Grundzustandes.	23
A.2.2)	Die stationären Lösungen im Fall eines linear polarisierten magnetischen Wechselfeldes.	28
A.2.3)	Die stationären Lösungen im Fall eines zirkular polarisierten magnetischen Wechselfeldes.	35
A.3)	Die stationären Lösungen für die Alignment-Komponenten unter der Einwirkung stärkerer magnetischer Wechselfelder.	37
B.)	Die Lösungen der Bewegungsgleichungen für einen Satz experimentell gegebener Parameter.	42
B.1)	Die Analog-Darstellung der Bewegungsgleichungen.	43

		Seite
B.2)	Die Struktur der stationären Lösungen.	48
B.3)	Die Struktur der Lösungen für den zeitlichen Mittelwert der Alignment-Komponente $u_{2,0}(j)$.	56
C.)	Meßanordnung und Meßverfahren.	64
C.1)	Die Meßanordnung.	64
C.2)	Das Streulicht-Signal.	71
C.3)	Meßverfahren und primäre Meßdaten.	75
D.)	Vergleich zwischen rechnerischen und experimentellen Ergebnissen.	84
D.1)	Kontrollmessungen zum Verhalten des zeitlichen Mittelwertes von $u_{2,0}(b)$.	84
D.2)	Die Frequenzverschiebung der Haupt-Resonanz.	86
D.3)	Die zweite subharmonische Resonanz.	88
D.3.1)	Die Frequenzverschiebung der zweiten subharmonischen Resonanz.	90
D.3.2)	Halbwertsbreite und Amplitudengang der zweiten subharmonischen Resonanz.	92
E.)	Zusammenfassung.	96
	Anhang.	
I	9-j-Koeffizienten. Koeffizientenmatrizen.	97
II	Zur Wirkungsweise des Analog-Netzwerkes.	101
III	Zur Herleitung des Streulichtsignals.	103
	Literaturverzeichnis.	107

Einleitung.

In einem atomaren Spin-System wird unter dem Einfluß eines statischen Magnetfeldes $\vec{H}_0$ (Führungsfeld) die energetische Entartung der ZEEMAN-Zustände aufgehoben. Wirkt auf das System ein senkrecht zu $\vec{H}_0$ orientiertes magnetisches Wechselfeld ein , so finden Übergänge der Atome zwischen den ZEEMAN-Termen statt . Der Resonanzcharakter dieser Übergänge ist durch die Frequenzbedingung

$$(1) \qquad \omega_0 = \Delta E/\hbar = \gamma H_0$$

bestimmt (ΔE: Energieunterschied benachbarter ZEEMAN-Terme; γ: gyro-magnetisches Verhältnis des betrachteten Atomzustandes) . Diese Übergänge führen im Zusammenwirken mit Relaxationsprozessen einerseits zu einer Gleichverteilung der Atome auf die magnetischen Unterzustände.Andererseits treten Phasenkorrelationen der Atome untereinander und gegenüber dem magnetischen Wechselfeld auf, die zu zeitlichen Änderungen der Orientierungsstruktur der statistischen Gesamtheit führen, wie sie etwa im Verhalten der makroskopischen Magnetisierung des Ensembles zum Ausdruck kommen und von den Erscheinungen der Kerninduktion her bekannt sind.Man spricht von einer magnetischen Resonanz im atomaren Spin-System.

Diese Resonanzerscheinungen werden als Verhalten der statistischen Gesamtheit einer Beobachtung dann zugänglich, wenn dem System eine von der Isotropie verschiedene Orientierungsstruktur aufgeprägt worden ist. Eine solche Orientierung ist z.B. im Führungsfeld $\vec{H}_0$ durch die Wechselwirkung mit einem thermischen Bad gegeben : es resultiert im thermischen Gleichgewicht eine ungleichmäßige Besetzung der ZEEMAN-Zustände gemäß einer BOLTZMANN-Verteilung.

Unter den Verfahren zur Erzeugung orientierter Atom-Systeme hat in letzter Zeit vor allem die Methode des optischen Pumpens an Interesse gewonnen [1][2][3][4]. Im optischen Pumpprozeß wird infolge der Wechselwirkung der Atome mit einem gerichteten optischen Strahlungsfeld Drehimpuls auf das atomare System übertragen. Unter geeigneten Bedingungen (etwa geeigneter Polarisation des Strahlungsfeldes) resultiert eine ungleichmäßige Verteilung der Atome auf die Unterzustände des angeregten Atomzustandes und des Grundzustandes. In der Gasphase kann der Einfluß der atomaren Relaxationsmechanismen hinreichend klein gehalten werden, sodaß bei Verwendung üblicher Spektrallampen als Pumplichtquellen bedeutende Orientierungsgrade (Polarisation, Ausrichtung) im atomaren Spin-System bezüglich der Ausbreitungsrichtung des Lichtes zu erreichen sind [1]).

Die Verteilung der Atome auf die Unterzustände des Grundzustandes bestimmt die Transparenz des Dampfes. In analoger Weise bestimmt die Verteilung im angeregten Atomzustand die Polarisation des von den Atomen in einen gegebenen Raumwinkel spontan emittierten Lichtes. Da die magnetische Resonanz eine Änderung dieser Verteilungen bewirkt, kann sie dementsprechend über Transparenzänderungen (Beobachtung in Absorption) oder über Intensität und Polarisationszustand des Streulichtes (Beobachtung im Streulicht) nachgewiesen werden.

Eine Versuchsanordnung, in der sowohl eine Orientierung des Spin-Systems mit Hilfe des optischen Pumpprozesses als auch ein optischer Nachweis der magnetischen Resonanz durchgeführt werden kann , ist in Fig. 1) schematisch dargestellt [5]. Die Anordnung ist speziell für Untersuchungen am Quecksilber geeignet , wo die Dynamik des optischen Pumpprozesses sich vergleichsweise leicht überblicken läßt.

---

[1]) Die in Gegenwart eines Führungsfeldes $\vec{H}_0$ erzeugte zusätzliche Orientierung kann demgegenüber im allgemeinen bei Zimmertemperatur und Feldstärken in der Größenordnung 100 Oe vernachlässigt werden.

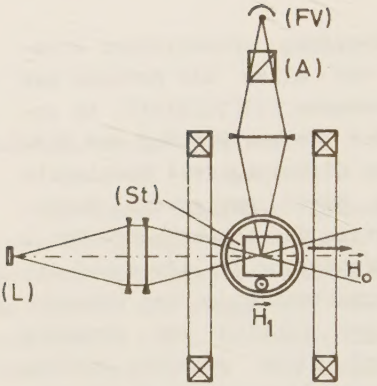


Fig. 1) Schematische Darstellung der Meßanordnung ((L) : Lichtquelle (^{198}Hg); (St):Streugefäß (^{201}Hg); (A): Analysator ; (FV): Fotovervielfacher).

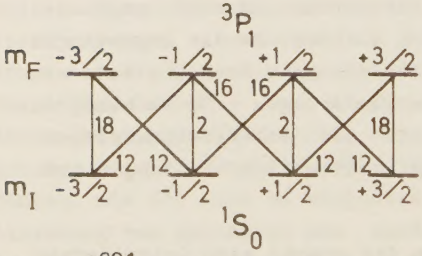


Fig.2) ^{201}Hg:Relative Übergangswahrscheinlichkeiten der Hfs-Komponente $^1S_0(I=3/2) \leftrightarrow {}^3P_1(F=3/2)$.

In dieser Meßanordnung kann aufgrund von Isotopie-Verschiebung und Hyperfeinstruktur der ungeraden Quechsilber-Isotope die Hfs-Komponente $^1S_0(I=3/2) \leftrightarrow {}^3P_1(F=3/2)$ der Resonanzlinie $\lambda = 253{,}7$ nm von ^{201}Hg unter Verwendung einer isotopenreinen Spektrallampe aus ^{198}Hg selektiv angeregt werden. Die Ausbreitungsrichtung des Pumplichtes und die Richtung des Führungsfeldes $\vec{H}_o$ fallen zusammen: man spricht unter dieser Bedingung von longitudinalem optischen Pumpen.

Ist im Pumplicht keine Polarisationsstruktur ausgezeichnet , so resultiert aufgrund der relativen Übergangswahrscheinlichkeiten der betrachteten Hfs-Komponente(vergl. Fig.2)) eine Ausrichtung (Alignment)[1]) der ^{201}Hg-Atome im Streugefäß bezüglich der Strahlrichtung.

---

[1]) Die Orientierungsstruktur des atomaren Systems charakterisieren wir durch die Begriffe "Polarisation"(polarization), beschrieben durch die Tensor-Komponenten $\mu_{K,\varkappa}$ mit K ungerade, und "Ausrichtung" (alignment),beschrieben durch die Tensor - Komponenten mit K gerade. Um Mißverständnisse auszuschließen, werden wir im Folgenden die Bezeichnung "Alignment" bevorzugen.

Das linear polarisierte magnetische Wechselfeld $\vec{H}_1$ ist senkrecht zu $\vec{H}_0$ orientiert. Die Beobachtung der magnetischen Resonanz erfolgt mit Hilfe einer polarisationsempfindlichen Meßanordnung im Streulicht senkrecht zur Richtung von $\vec{H}_0$.

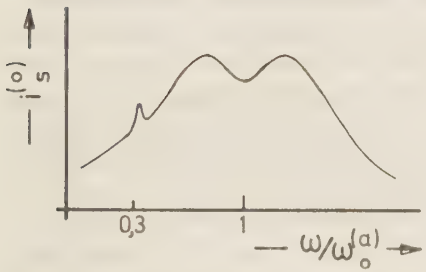


Fig. 3) ^{201}Hg(Alignment).Gleichstromanteil des π-Streulichtsignals als Funktion der Frequenz des Wechselfeldes $\vec{H}_1$.

In Fig. 3) ist ein typischer Verlauf für den Gleichstromanteil $i_s^{(o)}$ im π-Streulichtsignal(Schwingungsebene des Analysators parallel zu $\vec{H}_0$) als Funktion der Frequenz des magnetischen Wechselfeldes $\vec{H}_1$ dargestellt. Gemäß Gleichung (1) ist die Haupt-Resonanzstelle $\omega = \omega_o^{(a)}$ durch die LARMOR-Frequenz $\omega_o^{(a)} = \gamma_a H_o$ des atomaren Grundzustandes gegeben, wobei γ_a das gyro-magnetische Verhältnis des ^{201}Hg-Kernes ist (reiner Kern-Paramagnetismus des $^1S_0$-Hg-Grundzustandes).

Außer diesem Frequenzgang des Gleichstromanteiles beobachtet man im Streulicht Modulationserscheinungen, die im stationären Fall neben der Grundfrequenz ω auch höhere Harmonische des magnetischen Wechselfeldes enthalten [6][7][8]. Dabei sind die Einzelheiten der Signalstruktur wesentlich bestimmt durch die räumliche Orientierung der polarisationsempfindlichen Streulicht-Meßanordnung bezüglich der durch den Pumpstrahl und $\vec{H}_0$ gegebenen Symmetrieachse.

Schließlich können bei der Untersuchung an optisch gepumpten Systemen die Erscheinungen der magnetischen Resonanz im Grundzustand noch durch den Einfluß der Kinematik des angeregten Atomzustandes modifiziert werden.

Zur theoretischen Beschreibung der im Zusammenhang mit dem optischen Pumpprozess auftretenden magnetischen Resonanzerscheinungen ist es zweckmäßig, vom zeitlichen Verhalten des statistischen Operators $\mu^{(at)}$ des atomaren Systems auszugehen. Die Symmetriestruktur des Problems legt es nahe, eine Entwicklung des statistischen Operators nach Irreduzibel-Tensoroperatoren bezüglich der Raumdrehungsgruppe vorzunehmen [9][10]. Im Rahmen dieser Konzeption ist , ausgehend von der SCHRÖDINGER-Gleichung für den statistischen Operator des globalen Systems - Atom plus optisches Strahlungsfeld - , in einer früheren Arbeit eine Darstellung des optischen Pumpprozesses im Operator-Formalismus angegeben worden [11]. Diese Arbeit bildet die Grundlage bei der Beschreibung der hier durchgeführten Experimente. Verweise, die sich auf diese Arbeit beziehen , werden im Folgenden durch die Abkürzung C.D. gekennzeichnet werden.

Eine Diskussion der Bewegungsgleichungen für die Tensor-Komponenten $\mu_{K,\varkappa}$ des statistischen Operators des atomaren Systems unter den hier vorliegenden experimentellen Bedingungen zeigt für die stationären Lösungen das Auftreten verschiedener Resonanzphänomene in Abhängigkeit von der Frequenz des magnetischen Wechselfeldes . Wir unterscheiden Amplituden- und Phasen-Resonanzen der harmonischen Modulationsanteile von solchen Resonanzen, die sich in einer Änderung des zeitlichen Mittelwertes der Alignment-Komponente $\mu_{2,0}(a)$ des atomaren Grundzustandes ausdrücken [1]. Wenn wir im Folgenden

---

[1]) Die anschauliche Bedeutung dieser Resonanzen ergibt sich aus der Beziehung :

$$\mu_{2,0}(a) = \frac{1}{2}\left[\langle 3/2|\mu_a|3/2\rangle + \langle -3/2|\mu_a|-3/2\rangle - \langle 1/2|\mu_a|1/2\rangle - \langle -1/2|\mu_a|-1/2\rangle \right]$$

(vergl. C.D.(I.4.29),(II.1.4)), wobei die Diagonalelemente $\langle m|\mu_a|m\rangle$ des Operators μ_a die Besetzungswahrscheinlichkeiten der ZEEMAN-Terme des atomaren Grundzustandes für ^{201}Hg angeben. Für die hier zu beschreibenden Experimente wird das anschauliche Bild ergänzt durch die Bedingung : $\mu_{1,0}(a) = \mu_{3,0}(a) = 0$, d.h.

$\langle 3/2|\mu_a|3/2\rangle = \langle -3/2|\mu_a|-3/2\rangle$; $\langle 1/2|\mu_a|1/2\rangle = \langle -1/2|\mu_a|-1/2\rangle$

(vergl. Abschnitt A.1.2)).

von Resonanzen sprechen, ohne diesen Begriff weiter zu präzisieren, so wollen wir darunter immer Resonanzen in dem zuletzt genannten Sinne verstehen.

Die Einzelheiten dieser Resonanzstrukturen - wie auch allgemein der Amplituden- und Phasen-Resonanzen - hängen von der Polarisation des magnetischen Wechselfeldes ab. Die stationären Lösungen der Bewegungsgleichungen sind im Fall eines zirkular polarisierten Wechselfeldes in geschlossener Form angebbar und führen zu einer durch die Frequenzbedingung (1) bestimmten "Haupt-Resonanz". Im Fall eines linear polarisierten Wechselfeldes zeigt sich ein komplizierteres Lösungsverhalten:

Mit wachsender Wechselfeldstärke tritt einerseits die von der Kerninduktion her bekannte BLOCH-SIEGERT-Verschiebung der Haupt-Resonanzfrequenz auf [15]. Zum anderen beobachtet man im starken Wechselfeld eine Resonanz nicht nur in der Umgebung der Haupt-Resonanzstelle $\omega = \omega_0^{(a)}$ sondern auch für Frequenzen, für die $\omega \approx \omega_0^{(a)}/(2n+1)$ mit $n = 1,2,\ldots$ gilt (vergl. Fig. 3)). Diese an die Linear-Polarisation des Wechselfeldes gebundenen Resonanzen sind wohl zuerst von MARGERIE und BROSSEL [12] beim optischen Pumpen von Natrium beobachtet worden. Eine ausführliche theoretische und experimentelle Untersuchung wurde von WINTER [13] durchgeführt (vergl. auch [14][16]). Ausgehend von einem semi-klassischen Ansatz für die magnetische Wechselwirkung werden in diesen Darstellungen entsprechend der üblichen Behandlung der magnetischen Resonanz die Wahrscheinlichkeiten für einen Übergang zwischen benachbarten ZEEMAN-Termen im Rahmen einer zeitabhängigen Störungstheorie berechnet.

Diese Resonanzen können als Mehr-Quanten-Übergänge im magnetischen Wechselfeld gedeutet werden. Dabei zerlegt man das linear polarisierte (klassische) Feld $\vec{H}_1$ in eine rechts und eine links zirkular polarisierte Komponente und beachtet die hier gültige Auswahlregel $\Delta m = \pm 1$ für die magnetische Dipolstrahlung . Impuls- und Energiesatz sind erfüllt , wenn an einem solchen Übergang $2n+1$ Hochfrequenzquanten mit der

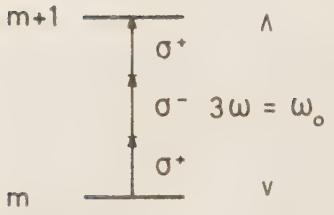


Fig. 4) Drei-Quanten-Übergang im magnetischen Wechselfeld (Zirkular-Polarisation: σ^+, σ^- bezogen auf die Richtung von $\vec{H}_o$).

Frequenz $\omega = \omega_o/(2m+1)$ beteiligt sind, deren Drehimpuls-Summe der Auswahlregel genügt (vergl.Fig.4)). Dieses Bild erklärt zwanglos das Auftreten solcher Resonanzen im linear polarisierten Feld und gibt ihre Lage im Spektrum wieder. Einzelheiten der Dynamik eines solchen Überganges und der Linienform werden im Rahmen dieser Vorstellung allerdings erst nach einer Quantisierung des magnetischen Feldes gewonnen werden können. Ansätze einer quantenmechanischen Behandlung sind von SHIRLEY [17], COHEN-TANNOUDJI und HAROCHE [18] vorgeschlagen worden.

Auch die den hier zu beschreibenden Experimenten zugrunde gelegte theoretische Behandlung der magnetischen Resonanz geht von einem semi-klassischen Ansatz für die Wechselwirkung zwischen Atom und Magnetfeld aus (vergl. C.D.(II.3.4)). Im Operator-Formalismus folgen jedoch hier die Resonanzphänomene ohne expliziten Bezug auf den Begriff der Übergangswahrscheinlichkeit aus der Struktur der stationären Lösungen eines Systems gekoppelter linearer Differentialgleichungen erster Ordnung für die Tensor-Komponenten des statistischen Operators $\mu^{(at)}$. Wir werden daher im Folgenden anstatt von Mehr-Quanten-Übergängen von subharmonischen Resonanzen sprechen.

Ähnliche Fragestellungen , wie sie in der vorliegenden Arbeit behandelt werden , sind auch von HAROCHE [19] untersucht worden. Das Hauptinteresse gilt jedoch dort einem neuen Typ von Resonanzen, wie sie beim transversalen optischen Pumpen (Strahlrichtung des Pumplichtes senkrecht zu $\vec{H}_o$) beobachtet werden. Dort, wie auch bei den Untersuchungen von WI[illegible]

ist eine wesentliche Voraussetzung die weitgehende Entkopplung von atomarem Grund- und Anregungszustand bezüglich der im atomaren System unter dem Einfluß des magnetischen Wechselfeldes induzierten "Kohärenzen". Diese Bedingungen sind bei höheren Führungsfeldstärken im allgemeinen weitgehend erfüllt. Demgegenüber wird in der vorliegenden Arbeit diese Voraussetzung fallen gelassen und gerade der Einfluß der Kinematik des angeregten Zustandes auf die magnetische Resonanz im Grundzustand beim optischen Pumpen in schwachen Führungsfeldern in die Untersuchung einbezogen.

In dem ersten, theoretischen Teil werden im Folgenden die in der früheren Arbeit (C.D.) hergeleiteten allgemeinen Beziehungen für die hier gewählte experimentelle Situation spezialisiert. Ein größerer Abschnitt ist der mathematischen Behandlung des resultierenden Systems linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit zeitabhängigen Koeffizienten[1]) für die Tensor-Komponenten des statistischen Operators gewidmet. Ein zweiter Abschnitt vermittelt einen Überblick über die aus Analog- und Digital-Rechnungen gewonnenen stationären Lösungen der Bewegungsgleichungen für einen Satz experimentell bestimmter Parameter im Fall eines linear polarisierten Wechselfeldes. Diese Lösungen werden besonders im Hinblick auf die experimentelle Prüfung diskutiert . Im dritten Abschnitt werden die Meßanordnung und die mit ihr gewonnenen primären Meßdaten beschrieben, ehe die experimentellen Ergebnisse in einem vierten Abschnitt den Rechnungen gegenübergestellt werden.

---

[1]) Zur allgemeineren Behandlung solcher Systeme vergl. [20].

A.) Theoretische Grundlagen.

A.1) Die Bewegungsgleichungen.

A.1.1) Die allgemeine Form der Bewegungsgleichungen.

Als Ausgangspunkt wählen wir die Bewegungsgleichungen für die Irreduzibel-Tensor-Komponenten des statistischen Operators $\mu^{(at)}$ des atomaren Systems in der Form:

(A.1,1)

$$\dot{\mu}_{K,\varkappa}(b) = -\frac{1}{T_s}\mu_{K,\varkappa}(b) + \frac{1}{T_p}\sum_{\substack{K_a,\varkappa_a \\ K_p,\varkappa_p}} \mu_{K_a,\varkappa_a}(a)\rho^{(p)}_{K_p,\varkappa_p}\hat{a}^2\hat{1}^2\hat{K}_a\hat{K}_p\langle K_a\varkappa_a,K_p\varkappa_p|K\varkappa\rangle \begin{Bmatrix} a & 1 & b \\ a & 1 & b \\ K_a & K_p & K \end{Bmatrix} -$$

$$- i\,[\varkappa k^{(b)}_{o}\mu_{K,\varkappa}(b) + k^{(b)}_{+}(K(K+1)-\varkappa(\varkappa+1))^{1/2}\mu_{K,\varkappa+1}(b) + k^{(b)}_{-}(K(K+1)-\varkappa(\varkappa-1))^{1/2}\mu_{K,\varkappa-1}(b)] - \frac{1}{T^{(b)}_{K,|\varkappa|}}\mu_{K,\varkappa}(b)$$

(A.1,2)

$$\dot{\mu}_{K,\varkappa}(a) = \frac{1}{T_s}\mu_{K,\varkappa}(b)\,\hat{b}^2\hat{K}\hat{1}\begin{Bmatrix} a & 1 & b \\ a & 1 & b \\ K & 0 & K \end{Bmatrix} -$$

$$- (-1)^{a+1-b+K}\frac{1}{T_p}\sum_{\substack{K_a,\varkappa_a \\ K_p,\varkappa_p}} \mu_{K_a,\varkappa_a}(a)\rho^{(p)}_{K_p,\varkappa_p}\hat{a}^2\hat{1}^2\hat{K}_a\hat{K}_p\langle K_a\varkappa_a,K_p\varkappa_p|K\varkappa\rangle$$

$$\begin{Bmatrix} K_p & 1 & 1 \\ b & a & a \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} K_a & K_p & K \\ a & a & a \end{Bmatrix}\frac{1+(-1)^{K_a+K_p+K}}{2} -$$

$$- i\,[\varkappa k^{(a)}_{o}\mu_{K,\varkappa}(a) + k^{(a)}_{+}(K(K+1)-\varkappa(\varkappa+1))^{1/2}\mu_{K,\varkappa+1}(a) + k^{(a)}_{-}(K(K+1)-\varkappa(\varkappa-1))^{1/2}\mu_{K,\varkappa-1}(a)] - \frac{1}{T^{(a)}_{K,|\varkappa|}}\mu_{K,\varkappa}(a)$$

(Quantenzahlen zum Operator der infinitesimalen Drehung : j = a,b; a:Grundzustand, b:Anregungszustand. Vergl. dazu auch

C.D. Abschnitt I.3.1)), mit

$$\mu_{K,\varkappa}(b) = P_b \rho_{K,\varkappa}(b)$$
$$\mu_{K,\varkappa}(a) = P_a \rho_{K,\varkappa}(a) \qquad \text{(A.2)}$$
$$Sp\ \rho_b = Sp\ \rho_a = 1$$

(vergl. C.D.(I.4.33)).

Die Größen P_a und P_b geben die Wahrscheinlichkeit an, ein Atom im Grundzustand bzw. im angeregten Zustand vorzufinden und die statistischen Operatoren ρ_a und ρ_b beschreiben die Verteilung der Atome auf die magnetischen Unterzustände von Grund- und Anregungszustand.

In den Bewegungsgleichungen wird die Dynamik des optischen Pumpprozesses ausgedrückt durch ein System simultaner Differentialgleichungen erster Ordnung für die Tensorkomponenten der Operatoren ρ_a und ρ_b, die durch das optische Strahlungsfeld in ihrer tensoriellen Struktur gekoppelt sind. Die Energiestromdichte des Pumplichtes beschreiben wir durch die "Pumpzeitkonstante" T_p und die Polarisation durch die "Struktur"-Parameter $\rho^{(n)p}_{K,\varkappa}$. Das Auftreten der Vektor-Kopplungskoeffizienten ist eine Folge der Erhaltung des Gesamtdrehimpulses im globalen System - Atom plus optisches Strahlungsfeld - während eines Elementarprozesses von Absorption und Emission. T_s steht für die mittlere Lebensdauer des angeregten Zustandes.

Die Gleichungen gelten unter der Bedingung der Breitband-Einstrahlung für eine allgemeine Polarisation und beliebige Einfallsrichtung (vernachlässigbare Apertur) des Pumplichtes , das keine Laser-Eigenschaften besitzen soll.

Neben dem eigentlichen optischen Pump-Prozess ist in den Bewegungsgleichungen noch die Wechselwirkung der Atome mit einem magnetischen Feld und einem thermischen Bad berücksichtigt. Die Gleichungen (A.1) ergeben sich aus C.D. (II.3.1),(II.4.6) und (II.4.2) unter Voraussetzungen, die im Folgenden kurz angegeben werden sollen.

Berücksichtigt man die DOPPLER-Breite des einfallenden Pumplichtes, so kann der Einfluß der "virtuellen" optischen Übergänge auf die Dynamik des Pumpprozesses unter den hier vorliegenden experimentellen Bedingungen vernachlässigt werden. Ist die "Zeitkonstante" τ ein Maß für die infolge der virtuellen Übergänge auftretende Termverschiebung, so ist diese Vernachlässigung gerechtfertigt, solange

(A.3) $$\tau \gg T_p$$

gilt (vergl. [4] und C.D. Abschnitt I.4.4)).

Für die Wechselwirkung mit dem Magnetfeld $\vec{H}$ wird der semi-klassische Ansatz

(A.4) $$W_{(j)} = - g_{(j)}\mu_B \vec{H}\cdot\vec{J}$$
$$= - h(k_0^{(j)}J_z + k_+^{(j)}J_+ + k_-^{(j)}J_-)$$

gemacht, wobei $g_{(j)}$ der g-Faktor des Atoms im Zustand $|j,m>$ und μ_B das BOHRsche Magneton ist (vergl.C.D.(II.3.4/5)).

Die thermische Relaxation beschreiben wir gemäß C.L. (II.3.6) und legen ein spezielles Relaxationsmodell zugrunde, indem wir für die Relaxationszeitkonstanten $T_{K,\varkappa}^{(j)}$ der Tensorkomponenten $\mu_{K,\varkappa}(j)$ verlangen:

(A.5) $$T_{K,\varkappa}^{(j)} = T_{K,|\varkappa|}^{(j)}$$

(achsiale Symmetrie des Relaxationsproblems). Ferner setzen wir voraus , daß es sich um eine reine Spin-Relaxation handelt, d.h. daß der Relaxationsprozess ohne Einfluß auf die Besetzungswahrscheinlichkeiten P_a und P_b des atomaren Grund- und Anregungszustandes bleibt.

Schließlich kann in Gegenwart eines äußeren Magnetfeldes eine Orientierung im atomaren System infolge einer BOLTZMANN-Verteilung auf die magnetischen Unterzustände erwartet werden. Bei den hier verwendeten Feldstärken kann dieser Effekt jedoch bei Zimmertemperatur im Hinblick auf die Dynamik des optischen Pumpprozesses unberücksichtigt bleiben.

A.1.2) Die Bewegungsgleichungen im Falle eines longitudinalen optischen Pumpens von ^{201}Hg ($^1S_0(I=3/2) \leftrightarrow {}^3P_1(F=3/2)$) mit unpolarisiertem Licht.

Die Bewegungsgleichungen (A.1) sollen nun für die hier gewählten experimentellen Bedingungen spezialisiert werden. Um insbesondere die räumliche Anordnung und die Polarisation des Pumplichtes eindeutig anzugeben, legen wir der Beschreibung des physikalischen Systems ein Koordinatensystem $\Sigma(x,y,z)$ zugrunde (vergl. Fig. A.1)), dessen Ursprung im Zentrum der Meßanordnung (Zentrum des Streugefäßes, vergl. Fig. 1)) angenommen wird. Die Ausbreitungsrichtung des Pumplichtes (p) und die Richtung des Führungsfeldes $\vec{H}_0$ falle mit der positiven z-Richtung zusammen . Das magnetische Wechselfeld $\vec{H}_1(t)$ sei längs der x-Richtung linear polarisiert.

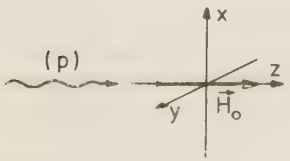


Fig. A.1) Lage des Bezugsystems.

Wegen a=b=3/2 gilt für den maximalen Tensorgrad in $\mu(j)$ bei einer Entwicklung nach Irreduzibel-Tensor-Operatoren: $K_{j,max}$. Analog dazu folgt für den maximalen Tensorgrad in $\rho^{(p)}$: $K_{p,max}=2$ (vergl. z.B.(I.4.23),(I.4.14)).

Eine Tabelle der algebraischen Werte der nichtverschwindenden, in (A.1) auftretenden 9-j-Koeffizienten ist im Anhang I zusammengestellt.

Wir behandeln das Pumplicht unter den idealisierenden Bedingungen C.D.(I.4.17), d.h. unter der Voraussetzung einer infinitesimalen Apertur und frequenzunabhängigen Polarisation. Für den die Polarisation des Pumplichtes beschreibenden statistischen Operator $\rho^{(p)}$ (vergl. C.D.(I.4.13)) wählen wir eine Standard-Darstellung über dem Raum der Zustände $|1,\lambda>$:

$$\rho^{(p)} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Dann gilt für die nicht-verschwindenden Tensor-Komponenten von $\rho^{(p)}$:

$$(A.6) \qquad \rho^{(p)}_{0,0} = (3)^{-1/2} \; ; \; \rho^{(p)}_{2,0} = (6)^{-1/2} .$$

Die Symmetrien des 9-j-Koeffizienten und der Faktor $1 + (-1)^{K_a+K_p+K}$ bewirken dann in (A.1), daß nur die Tensorkomponenten mit ungeradem bzw. mit geradem K untereinander in ihrer Dynamik verkoppelt werden.

Das resultierende System von Differentialgleichungen für K ungerade ist homogen. Ausgehend von einer Anfangsbedingung, die einer isotropen Verteilung der streuenden Atome entspricht, folgt für dieses System nur die triviale Lösung.

Nicht-triviale Lösungen ergeben sich bei unpolarisierter Einstrahlung nur für die "Alignment"-Komponenten (K_j=2).

Das zugeordnete System von Differentialgleichungen hat die Form:

(A.7,1)

$$\dot{\mu}_{2,0}(b) + \frac{1}{\theta^{(b)}_{2,0}}\mu_{2,0}(b) +$$

$$+ i\sqrt{6}\,[k^{(b)}_{+}\mu_{2,1}(b) + k^{(b)}_{-}\mu_{2,-1}(b)] = -\frac{1}{5T_p}(P_a + \mu_{2,0}(a))$$

$$\dot{\mu}_{2,\pm1}(b) + (\frac{1}{\theta^{(b)}_{2,1}} \pm ik^{(b)}_{o})\,\mu_{2,\pm1}(b) +$$

$$+ i\,[2k^{(b)}_{\pm}\mu_{2,\pm2}(b) + \sqrt{6}\,k^{(b)}_{+}\mu_{2,0}(b)] = 0$$

$$\dot{\mu}_{2,\pm2}(b) + (\frac{1}{\theta^{(b)}_{2,2}} \pm i2k^{(b)}_{o})\mu_{2,\pm2}(b) +$$

$$+ i2k^{(b)}_{\mp}\mu_{2,\pm1}(b) = \frac{3}{5T_p}\mu_{2,\pm2}(a)$$

(A.7,2)

$$\dot{\mu}_{2,0}(a) + \frac{1}{\theta^{(a)}_{2,0}}\mu_{2,0}(a) +$$

$$+ i\sqrt{6}\,[k^{(a)}_{+}\mu_{2,1}(a) + k^{(a)}_{-}\mu_{2,-1}(a)] = \frac{1}{5T_p}(P_a + \frac{T_p}{T_s}\mu_{2,0}(b))$$

$$\dot{\mu}_{2,\pm1}(a) + (\frac{1}{\theta^{(a)}_{2,1}} \pm ik^{(a)}_{o})\,\mu_{2,\pm1}(a) +$$

$$+ i\,[2k^{(a)}_{\pm}\mu_{2,\pm2}(a) + \sqrt{6}\,k^{(a)}_{+}\mu_{2,0}(a)] = \frac{1}{5T_s}\mu_{2,\pm1}(b)$$

$$\dot{\mu}_{2,\pm2}(a) + (\frac{1}{\theta^{(a)}_{2,2}} \pm i2k^{(a)}_{o})\mu_{2,\pm2}(a) +$$

$$+ i2k^{(a)}_{\mp}\mu_{2,\pm1}(a) = \frac{1}{5T_s}\mu_{2,\pm2}(b)$$

mit :

$$\frac{1}{\theta^{(b)}_{2,|x|}} = \frac{1}{T_s} + \frac{1}{T^{(b)}_{2,|x|}}$$

$$\frac{1}{\theta^{(a)}_{2,|x|}} = \frac{1}{T_p} + \frac{1}{T^{(a)}_{2,|x|}}$$

Für K = 0 folgt für die Besetzungswahrscheinlichkeiten P_a und P_b :

(A.8) $$\dot{P}_b + P_b\left(\frac{1}{T_s} + \frac{1}{T_p}\right) = \frac{1}{T_p}\left(1 - \frac{4}{5}\mu_{2,0}(a)\right)$$

$$P_a + P_b = 1$$

(vergl. C.D.(I.4.31)).

A.1.3) Die Bewegungsgleichungen der Alignment-Komponenten für harmonische Wechselfelder. Resonanz im Grundzustand.

Das Magnetfeld $\vec{H}(t)$ sei in der Form

$$\vec{H}(t) = \vec{H}_1(t) + \vec{H}_0$$

$$= H_{1,x}(t)\vec{e}_x + H_{1,y}(t)\vec{e}_y + H_0\vec{e}_z$$

vorgegeben. Im Fall eines längs $\vec{e}_x$ linear polarisierten Wechselfeldes :

$$H_{1,x}(t) = H_1 \cos \omega t \quad ; \quad H_{1,y}(t) = 0$$

folgt aus (A.4) (vergl. C.D.(II.3.5)) :

$$(A.9) \qquad k_{o}^{(j)} = \omega_{o}^{(j)} \quad ; \quad k_{\pm}^{(j)} = \frac{\omega_{1}^{(j)}}{2} \cos \omega t$$

mit

$$(A.10) \qquad \omega_{o}^{(j)} = \gamma_{(j)} H_{o}; \quad \omega_{1}^{(j)} = \gamma_{(j)} H_{1}$$

und im Fall eines rechts zirkular polarisierten Wechselfeldes :

$$H_{1,x}(t) = H_{1} \cos \omega t \; ; \; H_{1,y}(t) = H_{1} \sin \omega t$$

ist

$$(A.11) \qquad k_{\pm}^{(j)} = \frac{\omega_{1}^{(j)}}{2} e^{\mp i \omega t} \; .$$

Die analogen Beziehungen für das links zirkular polarisierte Feld ergeben sich formal aus (A.11) durch den Übergang von ω nach $-\omega$. Die Frequenzen $\omega_{o}^{(j)}$ und $\omega_{1}^{(j)}$ betrachten wir als Größen, deren Vorzeichen durch das gyromagnetische Verhältnis $\gamma_{(j)}$ bestimmt wird ($\gamma_{\text{Elektron}} < 0$, $\gamma_{\text{Proton}} > 0$) [1].

Der Grundzustand von ^{201}Hg zeigt einen reinen Kernparamagnetismus. Berücksichtigen wir ein elektronisches Moment für den angeregten Zustand, so gilt für das Verhältnis der LAMOR-Frequenzen im Grund- und Anregungszustand die Abschätzung :

$$(A.12) \qquad \left| \frac{\omega_{o}^{(a)}}{\omega_{o}^{(b)}} \right| \approx 10^{-3} \; .$$

---

[1] Das Vorzeichen von $\omega_{o}^{(j)}$ kann noch durch die Richtung von $\vec{H}_{o}$ beeinflußt werden.

Selbst unter der Annahme größerer Linienbreiten der magnetischen Resonanz sind dann die Hauptresonanzfrequenzen von Grund- und Anregungszustand im Spektrum so weit getrennt, daß es unter den üblichen experimentellen Bedingungen gerechtfertigt ist, von einer magnetischen Resonanz im Grund - zustand oder im angeregten Zustand allein zu sprechen. Wir werden im Folgenden immer voraussetzen, daß die Frequenz des magnetischen Wechselfeldes hinreichend klein ist, sodaß eine magnetische Resonanz im angeregten Zustand nicht in Betracht gezogen werden muß.

Die folgenden Überlegungen gehen davon aus,daß die Kinematik des angeregten Zustandes neben $\omega_o^{(b)}$ im wesentlichen durch dessen mittlere Lebensdauer $T_s = 1{,}2 \cdot 10^{-7}$s [5] bestimmt wird und daß diese Lebensdauer kurz ist gegenüber den sonstigen , das Verhalten des Systems bestimmenden Zeitkonstanten.

So gilt in schwachen Führungsfeldern ($H_o \leq 50$ Oe) wegen

(A.13) $$\gamma_{(a)} = -\ 1\ 760{,}41\ (\pm\ 0{,}02)\ \text{Hz/Oe}$$

(vergl. [5]) :

(A.14) $$\left| \omega_o^{(a)} \right| \leq 100\ \text{kHz} \quad .$$

Unter Verwendung konventioneller Lichtquellen ist die Pumpzeitkonstante T_p von der Größenordnung $1o^{-2}$s und die thermischen Relaxationszeitkonstanten des Grundzustandes sind in den hier zu beschreibenden Experimenten von der gleichen Größenordnung. Daraus folgt, daß wir unter der Bedingung einer magnetischen Resonanz im Grundzustand :

(A.15) $$\omega \approx \left| \omega_o^{(a)} \right|$$

immer von der Voraussetzung :

$$(A.16) \qquad \omega \, , \, | \, \omega_o^{(a)} \, | \, , \, \frac{1}{\theta_{2,|\varkappa|}^{(a)}} \ll \frac{1}{T_s}$$

ausgehen können. Nach einem kurzen Einschwingvorgang, dessen Dauer von der Größenordnung 10^{-7}s ist, wird die Kinematik des angeregten Zustandes durch die stationären Lösungen des Systems (A.7,1) wiedergegeben (vergl. C.D. Abschnitt II.5.2)). Für diese stationären Lösungen gilt :

(A.17)

$$\frac{1}{\theta_{2,0}^{(b)}} \mu_{2,0}(b) + \sqrt{6}\, i \left[k_+^{(b)} \mu_{2,1}(b) + k_-^{(b)} \mu_{2,-1}(b)\right] = -\frac{1}{5T_p}\left(P_a + \mu_{2,0}(a)\right)$$

$$\left(\frac{1}{\theta_{2,1}^{(b)}} \pm i\omega_o^{(b)}\right)\mu_{2,\pm1}(b) + i\left[2k_\pm^{(b)} \mu_{2,\pm2}(b) + \sqrt{6}\, k_\mp^{(b)} \mu_{2,0}(b)\right] = 0$$

$$\left(\frac{1}{\theta_{2,2}^{(b)}} \pm i2\omega_o^{(b)}\right)\mu_{2,\pm2}(b) + i\, 2k_\mp^{(b)} \mu_{2,\pm1}(b) = \frac{3}{5T_p}\mu_{2,\pm2}(a) \quad .$$

Das Differentialgleichungssystem (A.7,1) reduziert sich damit auf ein algebraisches Gleichungssystem für die Tensorkomponenten $\mu_{2,\varkappa}(b)$. Da die Einstellgeschwindigkeit $1/T_s$ im angeregten Zustand groß ist gegenüber den sonstigen Änderungsgeschwindigkeiten, können wir die stationären Lösungen des angeregten Zustandes in die dynamischen Gleichungen des Grundzustandes einsetzen, um sowohl die stationären Lösungen des Grundzustandes wie sein Einschwingverhalten zu bestimmen. Wir werden unter diesen Bedingungen im Folgenden von der

"algebraischen Näherung" für den angeregten Zustand sprechen (vergl. auch Abschnitt B.1)).

Wegen des wesentlich geringeren magnetischen Momentes des ^{201}Hg-Grundzustandes wird die Spin-Relaxation des angeregten Zustandes vor allem durch die Wechselwirkung mit den Wänden des Streugefäßes bestimmt. Wir werden daher immer voraussetzen können, daß

$$\frac{1}{T_s} \gg \frac{1}{T^{(b)}_{2,|\varkappa|}} \quad , \text{ d.h.} \qquad \text{(A.18)}$$

$$\frac{1}{\theta^{(b)}_{2,|\varkappa|}} \approx \frac{1}{T_s}$$

für alle $\varkappa$ gilt (vergl. (A.7)).

Damit sind die allgemeinen Voraussetzungen für die weiter unten beschriebenen Experimente angegeben. Das System (A.7,2),(A.17) bildet zusammen mit (A.18) den Ausgangspunkt der nachfolgenden Betrachtungen . Dabei gilt unser Interesse vor allem der Struktur der stationären Lösungen dieses Systems in Abhängigkeit von der Amplitude H_1 und der Polarisation des magnetischen Wechselfeldes

A.2) Die stationären Lösungen der Bewegungsgleichungen der Alignment-Komponenten im Fall eines schwachen magnetischen Wechselfeldes.

Die allgemeinen Lösungen der Bewegungsgleichungen können bei Berücksichtigung eines magnetischen Wechselfeldes nicht in geschlossener Form angegeben werden. Es wird daher im Folgenden ein Verfahren beschrieben, mit dessen Hilfe Aussagen über die Struktur der s t a t i o n ä r e n Lösungen abgeleitet werden können. Dabei wird zunächst der Fall eines schwachen magnetischen Wechselfeldes behandelt ehe das Verfahren auf den Fall stärkerer Wechselfelder übertragen und eine Gegenüberstellung der unter den verschiedenen Bedingungen berechneten Näherungslösungen im Abschnitt B.) diskutiert wird.

A.2.1) Die Reduktion auf die Bewegungsgleichungen für die Alignment-Komponenten des Grundzustandes.

Ausgehend von den Gleichungen (A.10) definieren wir :

$$q = \frac{\omega_1^{(j)}}{\omega_0^{(j)}} \qquad (j = a,b). \tag{A.19}$$

Der so eingeführte Parameter q kennzeichnet die Stärke des magnetischen Wechselfeldes bezogen auf die Stärke des Führungsfeldes $\vec{H}_0$. Wir sprechen von einem (relativ) schwachen magnetischen Wechselfeld, falls

$$|q| \ll 1 \tag{A.20}$$

gilt.

Unter Vernachlässigung aller Glieder , die in q von höherer als erster Ordnung sind, ergibt die Auflösung des Gleichungssystems (A.17) einen einfachen Zusammenhang zwischen den Tensor-Komponenten von Grund- und Anregungszustand. Insbesondere folgt für $\mu_{2,\pm1}(b)$:

(A.21)

$$\mu_{2,\pm1}(b) = -\frac{T_s}{5T_p}\, i\, \frac{\omega_o^{(b)} T_s}{1 \pm i\omega_o^{(b)} T_s} \left[2\, \frac{k_{\pm}^{(b)}}{\omega_o^{(b)}}\, \frac{3}{1 \pm i2\omega_o^{(b)} T_s}\, \mu_{2,\pm2}(a) - \right.$$

$$\left. - \sqrt{6}\, \frac{k_{\pm}^{(b)}}{\omega_o^{(b)}}\, (P_a + \mu_{2,0}(a)) \right].$$

Setzt man die gewonnenen Ausdrücke in (A.7,2) ein, so erkennt man, daß der direkte [1]) Einfluß von $\mu_{2,\pm1}(b)$ auf die Kinematik des Grundzustandes mit dem Gewichtsfaktor

(A.22)
$$G_{\pm} = \frac{\omega_o^{(b)} T_s}{25\omega_o^{(a)} T_p (1 \pm i\omega_o^{(b)} T_s)}$$

zu versehen ist. In diesem Gewichtsfaktor kommt eine von dem Parameter q unabhängige Verkopplung in der Kinematik von Grund- und Anregungszustand zum Ausdruck (vergl. Abschn. A.3).

Für die hier durchgeführten Experimente gilt :

(A.23)
$$\frac{T_s}{T_p} \leq 1{,}2 \cdot 10^{-5}$$

---

[1]) Neben dem direkten Einfluß von $\mu_{2,\pm1}(b)$ auf die Kinematik des Grundzustandes ist ein indirekter Einfluß dadurch gegeben, daß $\mu_{2,\pm1}(b)$ das Verhalten von $\mu_{2,0}(b)$ und $\mu_{2,\pm2}(b)$ bestimmt, die ihrerseits wieder das Verhalten der $\mu_{K,\varkappa}(a)$ direkt beeinflussen.

und bei Führungsfeldstärken in der Größenordnung von 10 Oe ist :

$$\omega_o^{(b)} T_s \approx 5 \qquad (A.24)$$

Daraus folgt zusammen mit (A.12) für $G_\pm$ die Abschätzung :

$$| G_\pm | \leq 10^{-3} .$$

Ferner ist wegen (A.23) im allgemeinen $P_a \approx 1$ (vergl.C.D. (II.5.5)) und außerhalb der Resonanz gilt :

$$\mu_{2,0}(a) \approx \frac{\theta_{2,0}^{(a)}}{T_p} .$$

Berücksichtigen wir einen experimentellen Wert für $\theta_{2,0}^{(a)}$ von 10^{-2}s und sind die Hochfrequenzfeldstärken hinreichend klein, so daß die Größenordnung von $\mu_{2,0}(a)$ sich auch in der Resonanz nicht wesentlich ändert, so ist :

$$\theta_{2,0}^{(a)} >> \frac{\omega_o^{(b)} T_s}{25\omega_o^{(a)}} \approx 10^{-5}\text{s}$$

und

$$|\mu_{2,0}(a)| >> P_a |G_\pm| .$$

Wir können dann unter diesen Bedingungen den direkten Einfluß von $\mu_{2,\pm 1}(b)$ auf die Kinematik des Grundzustandes vernachlässigen.

Im Rahmen dieser Näherung setzen wir zur Beschreibung der magnetischen Resonanz im Grundzustand die im Limes $q \to 0$ geltenden stationären Lösungen des Systems (A.17) :

$$\mu_{2,0}(b) = -\frac{T_s}{5T_p}\,(P_a + \mu_{2,0}(a))$$

(A.25)
$$\mu_{2,\pm1}(b) = 0$$

$$\mu_{2,\pm2}(b) = \frac{3T_s}{5T_p}\,\frac{1}{1 \pm i2\omega_o^{(b)}T_s}\,\mu_{2,\pm2}(a)$$

in die Bewegungsgleichungen (A.7,2) des Grundzustandes ein und erhalten :

(A.26)

$$\dot{\mu}_{2,0}(a) + \frac{1}{\tau_o}\mu_{2,0}(a) + \\ + i\sqrt{6}\,[k_+^{(a)}\mu_{2,1}(a) + k_-^{(a)}\mu_{2,-1}(a)] = \frac{1}{\theta}$$

$$\dot{\mu}_{2,\pm1}(a) + \left(\frac{1}{\tau_1} \pm i\omega_o^{(a)}\right)\mu_{2,\pm1}(a) + \\ + i\,[2k_\pm^{(a)}\mu_{2,\pm2}(a) + \sqrt{6}\,k_\mp^{(a)}\mu_{2,0}(a)] = 0$$

$$\dot{\mu}_{2,\pm2}(a) + \left(\frac{1}{\tau_2} \pm i2\omega_o^{(a)}\right)\mu_{2,\pm2}(a) + \\ + i\,2k_\mp^{(a)}\mu_{2,\pm1}(a) = 0$$

mit

(A.27)
$$\frac{1}{\theta} = \frac{4}{25T_p}$$

$$\frac{1}{\tau_o} = \frac{1}{T_{2,0}^{(a)}} + \frac{26}{25T_p}$$

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{T_{2,1}^{(a)}} + \frac{1}{T_p}$$

$$\frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{T_{2,2}^{(a)}} + \frac{1}{T_p} - \frac{3}{25T_p[1 + (2\omega_o^{(b)}T_s)^2]}$$

Dabei ist in der Differentialgleichung für $\mu_{2,\pm 2}(a)$ ein zu $G_{\pm}$ proportionaler "Verstimmungsterm" vernachlässigt worden (vergl. [21]).

Das Verhalten des atomaren Systems ist somit auf die Dynamik des atomaren Grundzustandes zurückgeführt. Die Lösungen des Gleichungssystems (A.26) bestimmen unter den hier formulierten Voraussetzungen wegen (A.25) auch das Verhalten im angeregten Zustand, wenn man in (A.25) die Bestimmungsgleichung für $\mu_{2,\pm 1}(b)$ durch (A.21) ersetzt.

Entsprechend der expliziten Zeitabhängigkeit des HAMILTON-Operators (A.4) haben wir es in (A.26) mit einem System gekoppelter Differentialgleichungen mit zeitabhängigen Koeffizienten zu tun. Dieses System von Differentialgleichungen wird gewöhnlich streng nur für den Fall eines zirkular polarisierten magnetischen Wechselfeldes gelöst. Das Lösungsverfahren kann als Transformation auf ein "mitrotierendes" Koordinatensystem gedeutet werden. Dieses Verfahren ist nicht mehr durchführbar, wenn insbesondere die subharmonischen Resonanzen untersucht werden sollen, deren Auftreten, wie in der Einleitung hervorgehoben wurde, an die lineare Polarisation des Wechselfeldes gebunden ist.

Ausgehend von einer FOURIER-Entwicklung der stationären Lösungen (FLOQUET-Theorem) werden wir im Folgenden zunächst den Fall eines linear polarisierten Wechselfeldes behandeln und im Anschluß daran auf den Fall des zirkular polarisierten Feldes kurz zurückkommen.

A.2.2) Die stationären Lösungen im Fall eines linear polarisierten magnetischen Wechselfeldes.

Im Limes $q \to 0$ gilt für die Lösungen des Gleichungssystems (A.26) :

$$\mu_{2,0}(a) = \frac{\tau_0}{\theta} + (\mu^{(0)}_{2,0}(a) - \frac{\tau_0}{\theta})e^{-t/\tau_0}$$

(A.28)
$$\mu_{2,\pm1}(a) = \mu^{(0)}_{2,\pm1}(a)\, e^{-t/\tau_1}\, e^{\mp i\omega^{(a)}_0 t}$$

$$\mu_{2,\pm2}(a) = \mu^{(0)}_{2,\pm2}(a)\, e^{-t/\tau_2}\, e^{\mp i2\omega^{(a)}_0 t} \quad .$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir im Folgenden voraus, daß die Richtung des Führungsfeldes $\vec{H}_0$ so gewählt wurde, daß $\omega^{(a)}_0$ positiv wird.

Für $q \neq 0$ machen wir für die stationären Lösungen des Systems (A.26) den FOURIER-Reihen-Ansatz :

$$\mu_{2,0}(a) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\ \alpha^{(0)}_n e^{in\omega t}$$

(A.29)
$$\mu_{2,1}(a) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\ \alpha^{(1)}_n e^{-in\omega t}$$

$$\mu_{2,2}(a) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\ \alpha^{(2)}_n e^{-in\omega t} \quad .$$

Die FOURIER-Darstellungen von $\mu_{2,-1}(a)$ und $\mu_{2,-2}(a)$ folgen aus (A.29) mit Hilfe der Konjugationsrelationen der Tensorkomponenten eines hermitischen Operators :

(A.30)
$$\mu^*_{2,\varkappa} = (-1)^{\varkappa}\mu_{2,-\varkappa} \quad .$$

Das Einsetzen des Lösungsansatzes in die Differentialgleichungen (A.26) führt auf ein System abzählbar vieler Rekursionsformeln für die Entwicklungskoeffizienten $\alpha_n^{(\varkappa)}$.

Im Fall eines linear polarisierten Wechselfeldes (vergl. (A.9)) erhält man in Matrixschreibweise :

$$\text{(A.31)} \qquad \frac{q}{2}\,(c)_n^{(-)}\vec{\alpha}_{n-2} + (c)_n\vec{\alpha}_n + \frac{q}{2}\,(c)_n^{(+)}\vec{\alpha}_{n+2} = \delta_{n,0}\,\vec{A}$$

mit

$$\vec{\alpha}_n = \begin{pmatrix} \alpha_n^{(o)} \\ \alpha_{-n+1}^{(+1)} \\ \alpha_{n+1}^{(-1)} \\ \alpha_{-n+2}^{(+2)} \\ \alpha_{n+2}^{(-2)} \end{pmatrix} \qquad ; \qquad \vec{A} = \begin{pmatrix} \tau_o/e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(n = 0,\pm1,\pm2,\dots) \quad .$$

Die Koeffizienten-Matrizen (c) sind im Anhang I zusammengestellt. Während $\mathrm{Det.}(c)_n \neq 0$ gilt, sind die Matrizen $(c)_n^{(+)}$ und $(c)_n^{(-)}$ singulär.

Die Rekursionsformeln (A.31) bestimmen die Lösungsvektoren $\vec{\alpha}_n$ als Funktionen des Parameters q. Im Limes $q \to 0$ ist nur der Vektor $\vec{\alpha}_o$ von Null verschieden :

$$\vec{\alpha}_n(0) = \delta_{n,0}\,\vec{A} \quad .$$

Eine m-malige Differentiation der Rekursionsformeln gestattet es, den Wert der m-ten Ableitung von $\vec{\alpha}_n(q)$ an der Stelle $q = 0$:

$$\text{(A.32)} \qquad \vec{\alpha}_n^{(m)}(0) = \frac{d^m}{dq^m}\,\vec{\alpha}_n\Big|_{q=0} \qquad (m = 0,1,2,..)$$

auf den Wert der (m-1)-ten Ableitung der Lösungen $\vec{\alpha}_{n\pm2}$, $\vec{\alpha}_n$ an dieser Stelle zurückzuführen. Wir können daher von einer TAYLOR-Entwicklung der Lösungen $\vec{\alpha}_n(q)$ ausgehen :

$$\vec{\alpha}_n(q) = \sum_0^\infty{}_m \frac{q^m}{m!} \vec{\alpha}_n^{(m)}(0) \quad . \tag{A.33}$$

Das System der Rekursionsformeln (A.31) zerfällt in zwei Teilsysteme :

Ein System für die Lösungsvektoren $\vec{\alpha}_n$ mit n ungerade und
ein System für die Lösungsvektoren $\vec{\alpha}_n$ mit n **gerade**.

Neben $\vec{\alpha}_n$ verschwinden für n u n g e r a d e an der Stelle q=0 auch alle Ableitungen $\vec{\alpha}_n^{(m)}(0)$ beliebiger Ordnung m. Für n ungerade besitzt das System (A.31) also nur die triviale Lösung. Daraus folgt zusammen mit der Darstellung (A.29) :

1.) Die stationären Lösungen $\mu_{2,0}(a)$, $\mu_{2,\pm2}(a)$ enthalten nur Beiträge mit den Frequenzen $2n\omega$.

2.) Die stationären Lösungen $\mu_{2,\pm1}(a)$ enthalten nur Beiträge mit den Frequenzen $2(n+1)\omega$, insbesondere ist ihr zeitlicher Mittelwert Null.

Für n g e r a d e zeigt man:

$$\vec{\alpha}_n^{(m)}(0) = 0 \quad \text{für alle n mit } |n| > 2m \quad . \tag{A.34}$$

Ausgehend von $\vec{\alpha}_0(0)$ lassen sich so im Prinzip Näherungen beliebiger Ordnung m (m: Ordnung von q in (A.33)) berechnen. Auf das damit verbundene Konvergenzproblem soll hier nicht näher eingegangen werden. Es sei nur angemerkt , daß die Kon-

vergenz im allgemeinen von dem Parameter $qd_k = \omega_1^{(a)} \tau_k$ (k = o,1,2) (vergl. Anhang I) abhängig ist.

Macht man nun Gebrauch von der früher zugrunde gelegten Voraussetzung $|q| << 1$ und vernachlässigt in der Rekursionsformel (A.31) für n = 0 die Glieder , die in q von höherer als erster Ordnung sind, so erhält man :

$$(A.35) \qquad (c)_o \vec{\alpha}_o = \vec{A} \quad .$$

Das ist ein System von fünf linearen Bestimmungsgleichungen für die FOURIER-Koeffizienten $\alpha_0^{(o)}$, $\alpha_1^{(\pm 1)}$, $\alpha_2^{(\pm 2)}$ mit den Lösungen:

$$\alpha_0^{(o)} = \frac{\tau_o}{\theta} [\, 1 - F(\Delta\omega) \,]$$

$$(A.36) \qquad \alpha_1^{(1)} = \frac{\tau_o}{\theta}(3/2)^{1/2} \omega_1 \, N^{-1}[\Delta\omega(4\Delta\omega^2 - 2\omega_1^2 + \tau_2^{-2}) - i\,\tau_1^{-1}(4\Delta\omega^2 + \frac{\tau_1}{\tau_2}\omega_1^2 + \tau_2^{-2})]$$

$$\alpha_2^{(2)} = -\frac{\tau_o}{\theta}(3/2)^{1/2} \omega_1^2 \, N^{-1}[\frac{1}{\tau_1\tau_2} + \omega_1^2 - 2\Delta\omega^2 + i\,\Delta\omega(\frac{1}{\tau_2} + \frac{2}{\tau_1})]$$

$$\alpha_1^{(-1)} = -\alpha_1^{(1)*} \quad ; \quad \alpha_2^{(-2)} = \alpha_2^{(2)*} \quad ,$$

mit:

$$\Delta\omega = \omega - \omega_o^{(a)} \quad ; \quad \omega_1 = \omega_1/2$$

$$F(\Delta\omega) = 3\,\frac{\tau_o}{\tau_1}\omega_1^2 \, N^{-1}(4\Delta\omega^2 + \frac{\tau_1}{\tau_2}\omega_1^2 + \tau_2^{-2})$$

$$N = (4\Delta\omega^2 + 4\omega_1^2 + \tau_2^{-2})(\Delta\omega^2 + \omega_1^2 + \tau_1^{-2}) +$$

$$+ \omega_1^2(\frac{\tau_1}{\tau_2} - 1)[3\omega_1^2 + \frac{2}{\tau_1\tau_2}(1 + 2\frac{\tau_2}{\tau_1})] + 3\,\frac{2}{1}(\frac{\tau_o}{\tau_1} - 1)(4\Delta\omega^2 + \frac{\tau_1}{\tau_2}\omega_1^2 + \tau_2^{-2})$$

Für $\tau_1 = \tau_2$ geht der Ausdruck für $\alpha_0^{(o)}$ in eine Formel über, die bereits von CAGNAC [5] angegeben wurde. Kann $T_{2,1}^{(a)} = T_{2,2}^{(a)}$ angenommen werden [22], so sind auch die Zeitkonstanten τ_1 und τ_2 in guter Näherung als gleich anzusehen, solange

$$\frac{3T_{2,2}^{(a)}}{25T_p[1 + (2\omega_o^{(b)}T_s)^2]} \ll 1 \qquad \text{(A.37)}$$

gilt. Diese Bedingung kann in den weiter unten beschriebenen Experimenten immer als erfüllt vorausgesetzt werden.

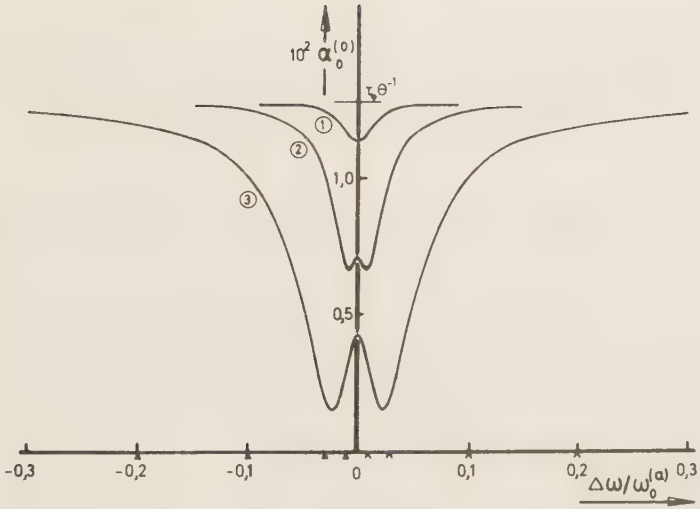
Die Lösungen (A.36) hängen nicht explizit von der Resonanzfrequenz $\omega_o^{(a)}$ des Grundzustandes ab. Sie sind in ihrer analytischen Gestalt bestimmt durch den Satz der Parameter :

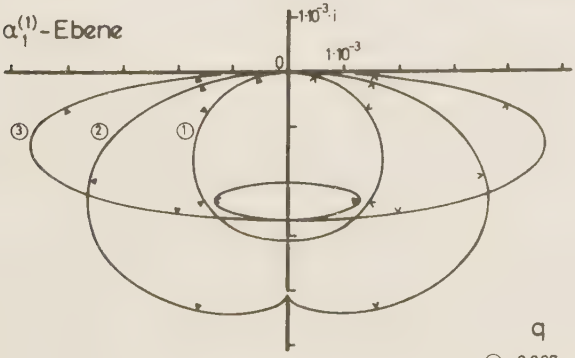
$$\tau_o/\theta \ , \ w_1\tau_1 \ , \ w_1\tau_2 \ , \ \Delta\omega/w_1 \ . \qquad \text{(A.38)}$$

In Fig. A.2) sind diese Lösungen für verschiedene Werte der Amplitude H_1 [1]) des magnetischen Wechselfeldes graphisch dargestellt. Im Gegensatz zu der sonst üblichen Beschränkung auf die Angabe der Lösung $\alpha_0^{(o)}$ ist hier eine Ortskurven-Darstellung der die Modulation des Grundzustand-Alignments beschreibenden komplexen Lösungen $\alpha_1^{(1)}$ und $\alpha_2^{(2)}$ aufgenommen worden. Neben der Möglichkeit einer experimentellen Realisierung der Messung dieser Modulationsanteile (vergl. Abschn. B.2)) ergibt sich die Bedeutung etwa der Lösung $\alpha_1^{(1)}$ aus der Tatsache, daß die Kinematik des Grundzustandes unter dem Einfluß des magnetischen Wechselfeldes von einer Diskussion des Verhaltens der Lösungen $\alpha_n^{(1)}$ her zu verstehen ist. Dieser Sachverhalt findet seinen mathematischen Ausdruck in der Tatsache, daß das Rekursionssystem (A.31) auf ein Rekursionssystem für die Entwicklungskoeffizienten $\alpha_n^{(\pm 1)}$ allein zurückgeführt werden kann [23].

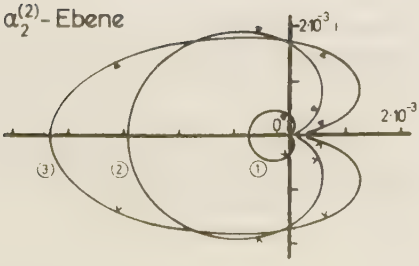
---

[1]) Um den Vergleich mit den anschließenden Darstellungen zu erleichtern, sind in Fig. A.2) als Maß für die Amplitude H_1 der Parameter $q = 2w_1/\omega_o^{(a)}$ und damit implizit die Resonanzfrequenz $\omega_o^{(a)}$ als Bezugsgrößen eingeführt.





q
① 0,007
② 0,021
③ 0,063



$\tau_1 = \tau_2 = 10$ ms
$\tau_0 = 8$ ms
$\tau_p = 100$ ms
$\omega_c^{(a)} = 6{,}75$ kHz

Vorausgehend:

Fig. A.2) Stationäre Lösungen für die Alignment-Komponenten im schwachen magnetischen Wechselfeld.

Anmerkung:

Bei der Angabe expliziter Lösungen insbesondere für die Tensor-Komponenten $\mu_{2,\varkappa}$ mit $\varkappa \neq 0$ ist eine Bemerkung zum Vorzeichen im Wertebereich des Parameters q erforderlich.

Die Vorzeichen-Frage tritt in den hier betrachteten Zusammenhängen unter verschiedenen Aspekten auf. In einem vorgegebenen Koordinatensystem kann durch ein Vorzeichen ein Drehsinn im elektro-magnetischen Feld (rechts oder links zirkular polarisiert) unterschieden werden. Ein solcher Drehsinn wird durch die gyro-magnetischen Eigenschaften des physikalischen Systems bewertet. Der Drehsinn des physikalischen Systems wird von der durch ein Vorzeichen zu unterscheidenden Richtung von $\vec{H}_0$ im Koordinatensystem und der relativen Richtung von Drehimpuls und magnetischem Moment (Vorzeichen von γ) bestimmt. Schließlich kann noch eine Änderung der zeitlichen Phasen-Normierung in einer Vorzeichenänderung zum Ausdruck kommen: führt man etwa in (A.9) eine zeitliche Phasenverschiebung um π durch, so kann diese Änderung der Normierung formal als Übergang zu negativen Werten der Amplitude H_1 beschrieben werden.

Das Vorzeichen von $\vec{H}_0$ und die zeitliche Phasen-Normierung bestimmen das Vorzeichen im Wertebereich von q .

Beim longitudinalen optischen Pumpen mit unpolarisiertem Licht unter dem Einfluß eines linear polarisierten magnetischen Wechselfeldes ist im elektro-magnetischen Feld kein Drehsinn ausgezeichnet. Da die hier durchgeführten experimentellen Untersuchungen , wie weiter unten dargelegt wird, sich außerdem auf die Beobachtung der zeitlichen Mittelwerte der Alignment-Komponenten $\mu_{2,0}(j)$ beziehen, ist das Vorzeichen im Wertebereich des Parameters q hier ohne Bedeutung.

Der Einfachheit halber wurde daher bei allen hier explizit durchgeführten Rechnungen (vergl. auch Abschnitt B.)) eine physikalische Situation vorausgesetzt, für die den in diesem Zusammenhang interessierenden Parametern : $\omega_o^{(a)}$, $\omega_o^{(b)}/\omega_o^{(a)}$ und q ein positiver Wertebereich zugeordnet werden kann. Zeitliche Phasen werden auf den Zeitverlauf der Funktion $|H_1|\cos \omega t$ bezogen (vergl. auch (A.29)).

Das Gleichungssystem (A.26) wurde unter der Voraussetzung hergeleitet, daß die Amplitude des Wechselfeldes als klein gegenüber der Führungsfeldstärke angesehen werden kann. Das Verhalten des atomaren Systems konnte dann auf die Kinematik des Grundzustandes allein zurückgeführt werden. Ausgehend vom Gleichungssystem (A.26) können jedoch auch die Grundzüge des Lösungsverhaltens bei höheren Wechselfeldstärken diskutiert werden, wenn eine schwache Kopplung zwischen Grund- und Anregungszustand vorliegt. Das gilt insbesondere für die bei Näherungslösungen höherer Ordnung auftretenden subharmonischen Resonanzen . Wir werden darauf weiter unten im Zusammenhang mit der Behandlung stärkerer magnetischer Wechselfelder ausführlicher zurückkommen (vergl. Abschnitte A.3), B.3)).

A.2.3) Die stationären Lösungen im Fall eines zirkular polarisierten magnetischen Wechselfeldes.

Das in diesem Falle unmittelbar nahe gelegte Lösungsverfahren wurde bereits im Abschnitt A.2.1) skizziert. Wir werden hier jedoch so vorgehen , daß wir das bei der Behandlung des linear polarisierten Feldes beschriebene Verfahren auf den vorliegenden Fall übertragen.

Für ein r e c h t s zirkular polarisiertes magnetisches Wechselfeld ("nicht-resonante"Komponente für $\omega_0^{(a)} > 0$) führt der FOURIER-Ansatz (A.29) zusammen mit (A.11) auf die Rekursionsgleichungen :

$$q(c)\,{}^{(-)}_{n}\vec{\alpha}_{n-2} + \vec{\alpha}_n + q(c)\,{}^{(+)}_{n}\vec{\alpha}_{n+2} = \delta_{n,0}\,\vec{A} \quad . \tag{A.39}$$

Notwendige Bedingungen für nicht verschwindende Funktionswerte $\vec{\alpha}_n^{(m)}(0)$ sind gegeben durch : n gerade und $m = |n|/2 + 2\ell$ ($\ell = 0,1,2,\ldots$). Eingehendere Untersuchungen zeigen , daß man für hinreichend kleine Werte von $|q|$ zu schnell konvergierenden Entwicklungen kommt, die kein Resonanzverhalten zeigen und daß

$$\vec{\alpha}_n = \delta_{n,0}\,\vec{A} \tag{A.40}$$

im allgemeinen ($\omega_o^{(a)} \neq 0$) eine sehr gute Näherung darstellt.

Im Falle eines l i n k s zirkular polarisierten Feldes ("resonante" Komponente für $\omega_o^{(a)} > 0$) erhält man :

$$(c)_n'\vec{\alpha}_n = \delta_{n,0}\,\vec{A} \tag{A.41}$$

(zur Matrix $(c)_n'$ vergl. Anhang I). In diesem Falle ist die für hinreichend kleine $|q|$ abgeleitete Näherungslösung (A.36) die strenge Lösung, wenn wir in den dortigen Gleichungen ω_1 durch ω_1 ersetzen . Die Lösung zeigt eine Resonanz an der Stelle $\omega = \omega_o^{(a)}$. Im Falle $\omega_o^{(a)} < 0$ ergibt sich die Lösung (A.41) für das rechts zirkular polarisierte Feld.

Subharmonische Resonanzen sind unter dem Einfluß eines zirkular polarisierten magnetischen Wechselfeldes nicht möglich.

A.3) Die stationären Lösungen für die Alignment-Komponenten unter der Einwirkung stärkerer magnetischer Wechselfelder.

Anstelle des Differentialgleichungssystems (A.26) haben wir jetzt von dem System (A.7) auszugehen, wobei wir die Bewegungsgleichungen für den angeregten Zustand in der Form (A.17) (algebraische Näherung) verwenden.

Das oben beschriebene Verfahren zur Bestimmung der stationären Lösungen läßt sich unmittelbar auf den vorliegenden allgemeineren Fall übertragen.

Für $\omega_o^{(a)} > 0$ [1]) machen wir analog zu (A.29) für die stationären Lösungen der Tensorkomponenten $\mu_{2,\varkappa}(b)$ einen FOURIER-Reihen-Ansatz :

$$\mu_{2,0}(b) = \Lambda^{-1} \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n \beta_n^{(o)} e^{in\omega t}$$

$$\mu_{2,1}(b) = \Lambda^{-1} \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n \beta_n^{(1)} e^{-in\omega t} \qquad \text{(A.42)}$$

$$\mu_{2,2}(b) = \Lambda^{-1} \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n \beta_n^{(2)} e^{-in\omega t} \quad .$$

Dabei wurde zugleich eine durch den Parameter Λ beschriebene lineare Transformation eingeführt, auf deren Zweckmäßigkeit weiter unten eingegangen wird.

Durch Einsetzen der Ansätze (A.29), (A.42) in die Bewegungsgleichungen erhält man für den Fall eines l i n e a r polarisierten magnetischen Wechselfeldes ein System gekoppelter Rekursionsgleichungen der Form :

---

[1]) Bei dem hier betrachteten Isotop ^{201}Hg ist $\omega_o^{(b)}/\omega_o^{(a)} > 0$ (vergl. (A.13) und Anmerkung zu Fig. A.2)).

$$\frac{q}{2}(C_b)^{(-)}\vec{\beta}_{n-2} + (C_b)\vec{\beta}_n + \frac{q}{2}(C_b)^{(+)}\vec{\beta}_{n+2} = \delta_{n,0}\vec{b} + (C_{a,b})\Lambda_{a,b}\vec{\alpha}_n$$

(A.43)

$$\frac{q}{2}(C)^{(-)}_n\vec{\alpha}_{n-2} + (C)_n\vec{\alpha}_n + \frac{q}{2}(C)^{(+)}_n\vec{\alpha}_{n+2} = \delta_{n,0}\vec{a} + (C_{b,a})\Lambda_{b,a}\vec{\beta}_n$$

mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \theta_o/5T_p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -\Lambda T_s/5T_p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_{b,a} = -i\,\frac{\Lambda^{-1}}{5\omega^{(a)}_o T_s} \quad ; \quad \Lambda_{a,b} = -i\,\frac{\Lambda}{5\omega^{(b)}_o T_p} \quad ,$$

wobei die Lösungsvektoren $\vec{\beta}_n$ analog zu (A.31) definiert sind (zu den Matrizen $(C),(C_b)$ vergl. Anhang I). Die Größen $\Lambda_{a,b}$ bzw. $\Lambda_{b,a}$ können angesehen werden als die relativen Gewichte, mit denen die Kinematik des Grundzustandes das Verhalten des angeregten Zustandes bestimmt und umgekehrt.

Im Limes $q \to 0$ ist

$$\vec{\beta}_n = \delta_{n,0}\vec{b} + (C_{a,b})\Lambda_{a,b}\vec{\alpha}_n$$

$$\vec{\alpha}_n = \delta_{n,0}\vec{a} + (C_{b,a})\Lambda_{b,a}\vec{\beta}_n \quad .$$

Diese Darstellung der Lösungen $\vec{\beta}_n$ entspricht dem Ansatz (A.25). Für $q = 0$ sind wiederum nur die Lösungsvektoren für $n = 0$ von Null verschieden :

(A.44)

$$\vec{\beta}_n(0) = \delta_{n,0}\left[-\Lambda\,\frac{T_s}{5T_p}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{A} \right) \right]$$

$$\vec{\alpha}_n(0) = \delta_{n,0}\,\vec{A} \quad .$$

Als notwendige Bedingung für nicht verschwindende Funktionswerte $\vec{\alpha}_n^{(m)}(0)$, $\vec{\beta}_n^{(m)}(0)$ gilt wieder : $|n| \geq 2m$ und die ausgehend von einer TAYLOR-Entwicklung um $q=0$ in beliebiger Ordnung der Näherung bestimmten Lösungen verschwinden identisch für n ungerade.

Entsprechend dem im Abschnitt A.2.3) geschilderten Vorgehen erhält man für den Fall eines r e c h t s z i r k u l a r polarisierten magnetischen Wechselfeldes :

$$q(C_b)^{(-)}\vec{\beta}_{n-2} + \vec{\beta}_n + q(C_b)^{(+)}\vec{\beta}_{n+2} = \delta_{n,0}\vec{b} + (C_{a,b})\Lambda_{a,b}\vec{\alpha}_n$$

(A.45)

$$q\,(C)_n^{(-)}\vec{\alpha}_{n-2} + \vec{\alpha}_n + q\,(C)_n^{(+)}\vec{\alpha}_{n+2} = \delta_{n,0}\vec{a} + (C_{b,a})\Lambda_{b,a}\vec{\beta}_n$$

und für den l i n k s z i r k u l a r polarisierten Fall:

$$(C_b)'\vec{\beta}_n = \delta_{n,0}\vec{b} + (C_{a,b})\Lambda_{a,b}\vec{\alpha}_n$$

(A.46)

$$(C)_n'\vec{\alpha}_n = \delta_{n,0}\vec{a} + (C_{b,a})\Lambda_{b,a}\vec{\beta}_n \quad ,$$

ohne daß die früher gemachten Aussagen wesentlich modifiziert würden . Insbesondere lassen sich die Aussagen über das Verschwinden der Funktionswerte $\vec{\alpha}_n^{(m)}(0)$ auch hier auf die $\vec{\beta}_n^{(m)}(0)$ übertragen.

Das erläuterte Verfahren zur Bestimmung der stationären Lösungen ist im Prinzip nicht beschränkt auf den Fall der algebraischen Näherung der Bewegungsgleichungen des angeregten Zustandes in der Form (A.17). Im allgemeineren Fall des ursprünglichen Gleichungssystems (A.7) zeigen die Koeffizientenmatrizen $(C_b)^{(\pm)}$, (C_b) und $(C_{a,b})$ als Funktionen der Frequenz des magnetischen Wechselfeldes ein Resonanzverhalten und sind abhängig vom Index n .

Wie bereits im Abschnitt A.2.1) erwähnt wurde, ist die Möglichkeit der Reduktion der Bewegungsgleichungen auf die Dynamik des Grundzustandes nicht allein abhängig von der Größe des Parameters $|q|$, sondern auch abhängig vom Grad der Kopplung zwischen Grund- und Anregungszustand. Diese Kopplung wird einmal bewirkt durch die Wechselwirkung mit dem optischen Strahlungsfeld. Bei gegebener Polarisation des Pumplichtes ist der Intensitätsparameter T_s/T_p noch verfügbar. Zum anderen beeinflußt die Eigen-Bewegung im Grund- und Anregungszustand die Phasenbeziehungen zwischen den Tensorkomponenten von Grund- und Anregungszustand untereinander und gegenüber dem magnetischen Wechselfeld [1]). Aus den für die Eigen-Bewegung charakteristischen Parametern $\omega_o^{(a)} T_p$ und $\omega_o^{(b)} T_s$ lassen sich mit Hilfe von T_s/T_p die Kopplungsparameter $\Lambda_{a,b}$ und $\Lambda_{b,a}$ berechnen.

Für Abschätzungen und die im Abschnitt B.) beschriebenen Rechnungen ist es zweckmäßig , den in (A.42) eingeführten Parameter Λ so zu bestimmen, daß die Kopplungsparameter $\Lambda_{a,b}$ und $\Lambda_{b,a}$ gleich werden. Aus (A.43) folgt dann :

$$\Lambda^2 = \frac{\omega_o^{(b)} T_p}{\omega_o^{(a)} T_s} \qquad \text{(A.47)}$$

und für $\omega_o^{(a)} = 10^4 \text{Hz}$, $T_p = 10^{-1}\text{s}$ ist wegen (A.12/13) :

$$\Lambda \approx 10^4 \quad ; \quad |\Lambda_{a,b}| = |\Lambda_{b,a}| \approx 10^{-2} \qquad \text{(A.48)}$$

Bei gegebener Pumpzeit T_p ist der Betrag der Kopplungsparameter umgekehrt proportional zur Führungsfeldstärke H_o. Vernachlässigen wir dann für hinreichend starke Führungsfelder die Kopplungsterme in den Rekursionsformeln (A.43/45/46), so ergeben sich für den Grundzustand wieder die Rekursionsgleichungen des Abschnittes A.2) , wobei zu beachten ist, daß

---

[1]) Diese Phasenbeziehungen werden oft als "HERTZsche Kohärenzen" bezeichnet [4].

für $T_p >> \theta\left|\begin{matrix}a\\ \varkappa\end{matrix}\right|$ die Koeffizientenmatrizen $(C)_n$ in die Matrizen $(c)_n$ übergehen. Im Sinne einer solchen Näherung können dann die einfacheren Formeln des Abschnittes A.2) herangezogen werden, um das Verhalten der Lösungen bei höheren Werten des Parameters $|q|$ zu untersuchen, wobei die Gültigkeit der Näherung über diese allgemeinen Betrachtungen hinaus im Einzelfall ausführlicher zu diskutieren ist.

B.) Die Lösungen der Bewegungsgleichungen für einen Satz experimentell gegebener Parameter.

In dem vorangegangenen Abschnitt wurden die Grundlagen zusammengestellt, auf denen eine rechneriache Behandlung der Bewegungsgleichungen aufgebaut wurde mit dem Ziel, einen Vergleich zwischen den theoretischen Voraussagen und den experimentellen Ergebnissen zu ermöglichen.

Neben der Untersuchung einer Modifikation der magnetischen Resonanz im Grundzustand aufgrund der Kinematik des angeregten Zustandes bietet sich die Beobachtung der Modulationserscheinungen und subharmonischen Resonanzen als besonderes Kriterium eines solchen Vergleiches an.

Wir werden in diesem Abschnitt einen Überblick über die Struktur der zu erwartenden magnetischen Resonanzerscheinungen geben, ehe wir die experimentelle Anordnung beschreiben, mit der Teilaspekte der magnetischen Resonanz untersucht werden konnten.

Die numerische Durchführung des beschriebenen Näherungsverfahrens zur Berechnung der stationären Lösungen der Bewegungsgleichungen kann als Aufgabe für einen Digitalrechner programmiert werden [23]. Um einen Überblick über die Lösungsmannigfaltigkeit in Abhängigkeit von den physikalischen Parametern zu gewinnen, ist es jedoch zweckmäßiger, das Problem mit Hilfe eines Analogrechners zu behandeln. Wir werden daher im Folgenden kurz auf die Analog-Darstellung der Bewegungsgleichungen eingehen und uns dabei auf den hier experimentell realisierten Fall eines l i n e a r polarisierten magnetischen Wechselfeldes beschränken.

B.1) Die Analog-Darstellung der Bewegungsgleichungen.

Zur Analog-Darstellung der Bewegungsgleichungen gehen wir im Gleichungssystem (A.7) zur reellen Schreibweise über:

$$\mu_{2,0}(a) = x_0 \qquad \mu_{2,0}(b) = u_0$$

(B.1) $$\mu_{2,1}(a) = x_1 + i\, y_1 \qquad \mu_{2,1}(b) = u_1 + i\, v_1$$

$$\mu_{2,2}(a) = x_2 + i\, y_2 \qquad \mu_{2,2}(b) = u_2 + i\, v_2$$

(**siehe** auch (A.30)). Benutzen wir außerdem die Transformation gemäß (A.42) :

(B.2) $$z_{|\varkappa|} = \Lambda\, u_{|\varkappa|} \quad , \quad w_{|\varkappa|} = \Lambda\, v_{|\varkappa|} \quad ,$$

so folgt für den Fall eines linear polarisierten Wechselfeldes in algebraischer Näherung für den Anregungszustand das Gleichungssystem :

$$z_0 = - V \frac{\beta}{3} - \frac{\beta}{3} x_0 + \sqrt{6}\, g\, h_0\, w_1\, q \cos \omega t$$

$$w_1 = - g h_0 [\, z_1 + (z_2 + \sqrt{\frac{3}{2}}\, z_0)\, q \cos \omega t \,]$$

$$z_1 = g h_0 [\, w_1 + w_2\, q \cos \omega t \,]$$

$$w_2 = \beta y_2 - g h_0 [\, 2 z_2 + z_1\, q \cos \omega t \,]$$

$$z_2 = \beta x_2 + g h_0 [\, 2 w_2 + w_1\, q \cos \omega t \,]$$

(B.3)

$$\dot{x}_0 = k_0 \{ VP + \alpha z_0 - \vartheta_0 x_0 + \sqrt{6}\, h_0\, y_1\, q \cos \omega t \,]$$

$$\dot{y}_1 = k_0 \{ \alpha w_1 - \vartheta_1 y_1 - h_0 [\, x_1 + (x_2 + \sqrt{\frac{3}{2}}\, x_0) q \cos \omega t]]$$

$$\dot{x}_1 = k_0 \{ \alpha z_1 - \vartheta_1 x_1 + h_0 [\, y_1 + y_2\, q \cos \omega t \,]]$$

$$\dot{y}_2 = k_0 \{ \alpha w_2 - \vartheta_2 y_2 - h_0 [\, 2 x_2 + x_1\, q \cos \omega t \,]]$$

$$\dot{x}_2 = k_0 \{ \alpha z_2 - \vartheta_2 x_2 + h_0 [\, 2 y_2 + y_1\, q \cos \omega t \,]]$$

mit

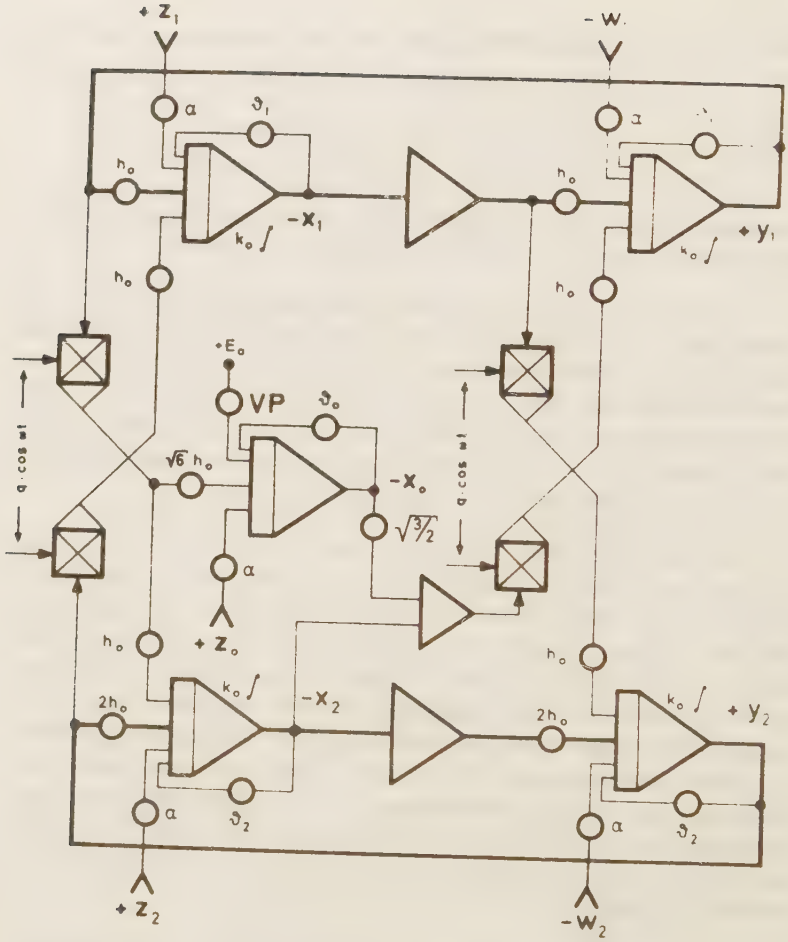
$$h_0 = \frac{\omega_o^{(a)}}{\omega_o} \quad , \qquad g = \frac{\gamma_{(b)}}{\gamma_{(a)}}\, \omega_o T_s$$

$$\beta = \Lambda \frac{3 T_s}{5 T_p} \quad , \qquad \alpha = \Lambda^{-1} \frac{1}{5 T_s \omega_o}$$

$$P = \frac{1}{5 T_p \omega_o} = \frac{5}{3}\, \alpha\, \beta$$

$$\vartheta_{|x|} = \frac{1}{\theta_{|x|} \omega_o} \quad , \qquad k_0 = \frac{1}{R_o C_o}$$

(R_o:"1"-Widerstand ; C_o:"1"-Kondensator).



Integrierer

Summierer, Inverter

Multiplizierer-Netzwerk

Koeffizienten-Potentiometer

Operationsverstärker

Analog - Darstellung

Grundzustand (Prinzip

ler und den Oberwellengehalt der verwendeten Parabel-Multiplizierer-Netzwerke.

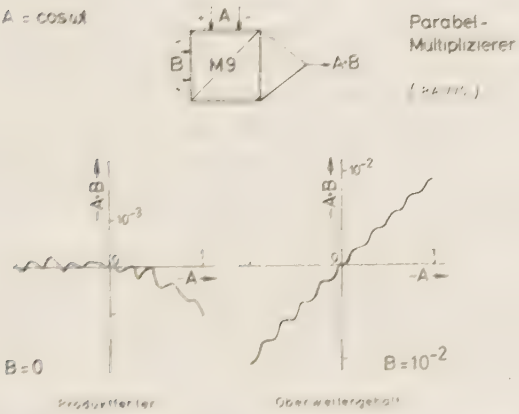


Fig. B.2) Produktfehler und Oberwellengehalt eines Parabel-Multiplizierer-Netzwerkes.

In Fig. B.2) sind Messungen dieser systematischen Fehler an einem repräsentativen Parabel-Multiplizierer-Netzwerk wiedergegeben. Die Fehlerquelle ist durch die technische Konzeption solcher Netzwerke (10 Stützstellen pro Quadrant) bedingt. Obwohl der absolute Fehler auch hier in die Größenordnung 10^{-3} fällt, kann insbesondere die Erzeugung zusätzlicher Oberwellen infolge einer Bewertung durch das Resonanzverhalten des Analog-Netzwerkes im Bereich der subharmonischen Resonanzen zu größeren Rechenfehlern führen. Die aus Analog-Rechnungen gewonnenen Aussagen werden daher im Folgenden - soweit dies möglich ist - an digitalen Rechnungen kontrolliert (vergl. auch Abschnitt D.3.2)).

B.2) Die Struktur der stationären Lösungen.

Aus Gründen , auf die wir im Zusammenhang mit der Diskussion der Meßanordnung eingehen werden , sind die hier zu beschreibenden Experimente auf einen Wertebereich für $|\omega_o^{(a)}|$ beschränkt , für den wir von einer nur schwachen Kopplung zwischen der Kinematik im Grund- und Anregungszustand ausgehen können. Da wir außerdem eine magnetische Resonanz im angeregten Zustand ausgeschlossen haben, werden die stationären Lösungen als Funktionen des Frequenzverhältnisses $\omega/\omega_o^{(a)}$ vor allem durch das Resonanzverhalten im Grundzustand bestimmt. Wir wenden uns daher zunächst den Lösungen für die Alignment-Komponenten des Grundzustandes zu.

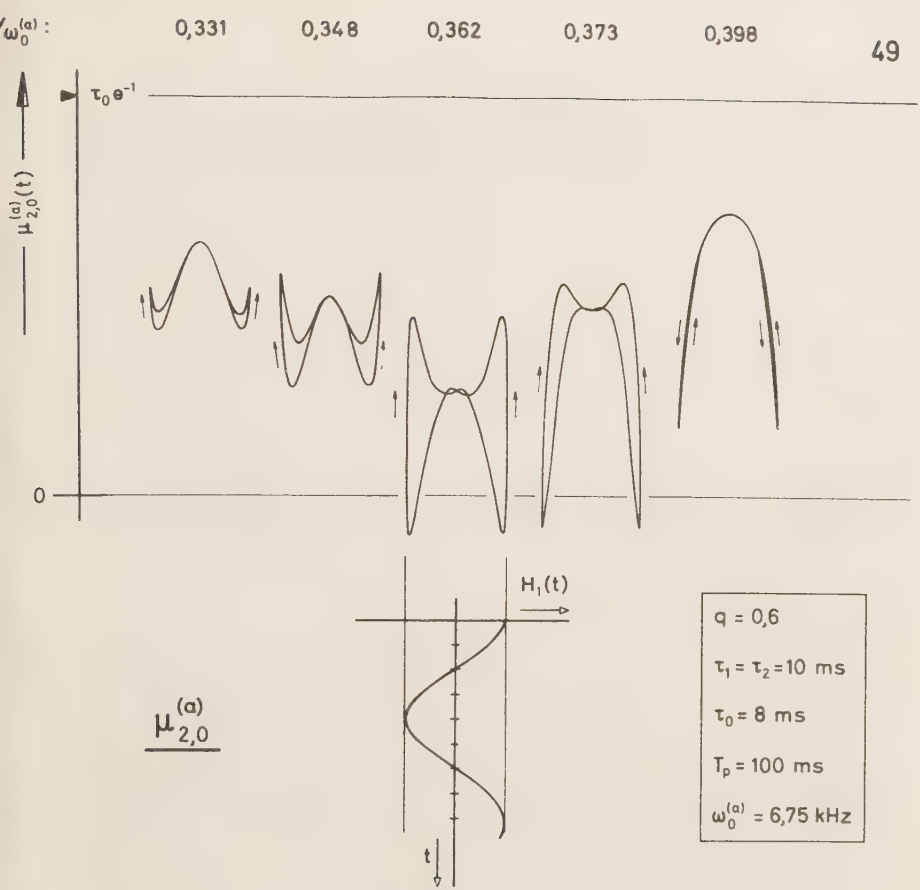
In den Figuren B.3) bis B.5) sind aus Analog-Rechnungen gewonnene stationäre Lösungen für die Alignment-Komponenten $\mu_{2,\varkappa}(a)$ ($\varkappa \geq 0$, vergl. (A.30)) des Grundzustandes graphisch dargestellt.

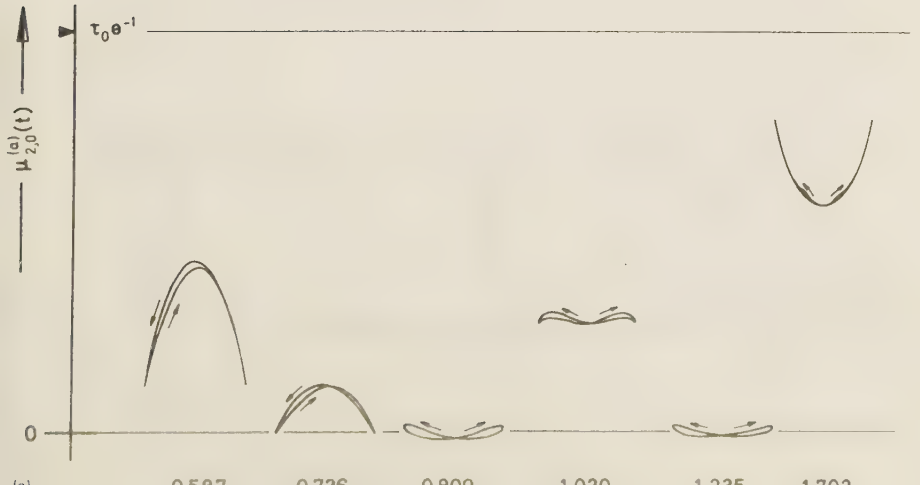
Die den Rechnungen zugrunde gelegten Werte für die verschiedenen Zeitkonstanten wurden so gewählt, daß sie den im Experiment gegebenen Bedingungen entsprechen. Der Parameterwert $q = 0{,}6$ konnte zwar im Experiment nicht realisiert werden, erwies sich aber als geeignet für die allgemeine Diskussion des Lösungsverhaltens.

Als gemeinsames Merkmal dieser Lösungen für die Tensor-Komponenten des atomaren Grundzustandes folgt, daß das Resonanzverhalten nicht beschränkt ist auf den Frequenzbereich $\omega/\omega_o^{(a)} \approx 1$. Den im Fall eines linear polarisierten magnetischen Wechselfeldes auftretenden subharmonischen Resonanzen kann die Frequenzbedingung:

Nachfolgend :

Fig. B.3) Stationäre Lösungen der Alignment-Komponente $\mu_{2,0}(a)$ (Ordinate) aufgetragen über dem magnetischen Wechselfeld (Abszisse).


$\omega_0^{(a)}$:
0,331
0,348
0,362
0,373
0,398
$\tau_0 e^{-1}$
$\mu_{2,0}^{(a)}(t)$
0
$H_1(t)$
t
$\mu_{2,0}^{(a)}$
q = 0,6
$\tau_1 = \tau_2 = 10$ ms
$\tau_0 = 8$ ms
$T_p = 100$ ms
$\omega_0^{(a)} = 6,75$ kHz


$\tau_0 e^{-1}$
$\mu_{2,0}^{(a)}(t)$
0

Anmerkung zu den Figuren B.3) bis B.6) :

Um Vergleiche bezüglich der Größenordnungen zu erleichtern, wurde in alle Darstellungen der Wert τ_o/θ für das von der magnetischen Resonanz ungestörte Grundzustand-Alignment als Maß aufgenommen.

(B.5) $$\frac{\omega}{\omega_o^{(a)}} = \frac{1}{2n+1} \qquad (n = 1,2,\ldots)$$

zugeordnet werden. Wir kennzeichnen im Folgenden diese Resonanzen durch den Abzählparameter $(2n+1)-1$ und sprechen etwa im Frequenzbereich $\omega/\omega_o^{(a)} \approx 1/3$ von der zweiten subharmonischen Resonanz.

Die Fig. B.3) gibt Lösungen für die reelle Komponente $\mu_{2,0}(a)$ wieder. Um eine möglichst geschlossene Form der Darstellung auch im Hinblick auf die relative Phasenlage der Modulationsanteile zu gewinnen , wurde $\mu_{2,0}(a)$ aufgetragen über der Zeitfunktion $H_1(t) = |H_1| \cos \omega t$ (vergl. Anmerkung zu Fig. A.2)). Die einzelnen so entstehenden Kurvenformen sind jeweils bestimmten Werten des Frequenzverhältnisses $\omega/\omega_o^{(a)}$ zugeordnet. Die Anordnung richtet sich nach den Frequenzbereichen von zweiter subharmonischer Resonanz [1] $(0{,}331 \leq \omega/\omega_o^{(a)} \leq 0{,}398)$ und Hauptresonanz $(0{,}587 \leq \omega/\omega_o^{(a)} \leq 1{,}702)$.

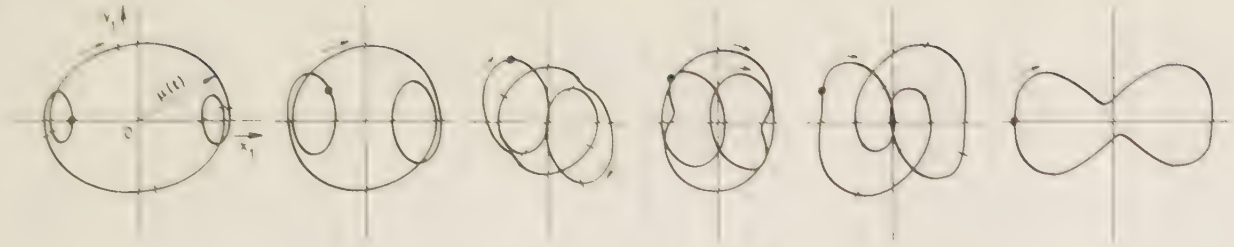
---

[1]) Im Bereich höherer subharmonischer Resonanzen überwiegt der Oberwellengehalt der Parabel-Multiplizierer den primären Effekt.

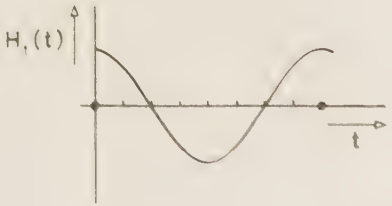
Nachfolgend :

Fig. B.4) Stationäre Lösungen der Alignment-Komponente $\mu_{2,1}(a)$.

$\omega/\omega_0^{(a)}$: 0,347 0,356 0,363 0,369 0,375 0,396



$\mu_{2,1}^{(a)}$ – Ebenen



q = 0,6	$\omega_0^{(a)}$ = 6,75 kHz
	$\tau_1 = \tau_2$ = 10 ms
	τ_0 = 8 ms
	T_p = 100 ms

$\omega/\omega_0^{(a)}$: 0,590 0,811 0,936 1,020 1,126 1,241

Die magnetische Resonanz findet sowohl in einer frequenzabhängigen Änderung des zeitlichen Mittelwertes von $\mu_{2,0}(a)$ als auch in einer Variation von Amplitude und Phase der Modulationsanteile ihren Ausdruck . Die Modulationsanteile erfüllen die Frequenzbedingung $\omega_n = 2n\omega$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Sie sind im Bereich der subharmonischen Resonanz besonders deutlich ausgeprägt (vergl. Anhang II.).

In Fig. B.4) ist nach dem oben beschriebenen Anordnungsschema die Lösung $\mu_{2,1}(a)$ in GAUSSschen Zahlenebenen dargestellt. Die von der komplexwertigen Zeitfunktion $\mu_{2,1}(a)$ in der Zahlenebene beschriebene Ortskurve ist im Bereich der subharmonischen Resonanz für einige herausgegriffene Fälle durch Zeitmarken gegliedert, wobei wiederum auf den Zeitverlauf des Wechselfeldes zurückgegriffen wurde [1]).

Der Oberwellengehalt wird durch die ungeradzahligen Vielfachen der Grundfrequenz bestimmt und ist wiederum im Bereich der subharmonischen Resonanz besonders stark ausgeprägt, während der zeitliche Mittelwert von $\mu_{2,1}(a)$ verschwindet. Im Bereich der Hauptresonanz dominiert die Grundwelle. Das aus der Darstellung abzulesende Verhalten des FOURIER-Koeffizienten $\alpha_1^{(1)}$ als Funktion der Frequenz gibt im Bereich der Hauptresonanz die Grundzüge des in Fig.A.2) wiedergegebenen Verlaufes wieder.

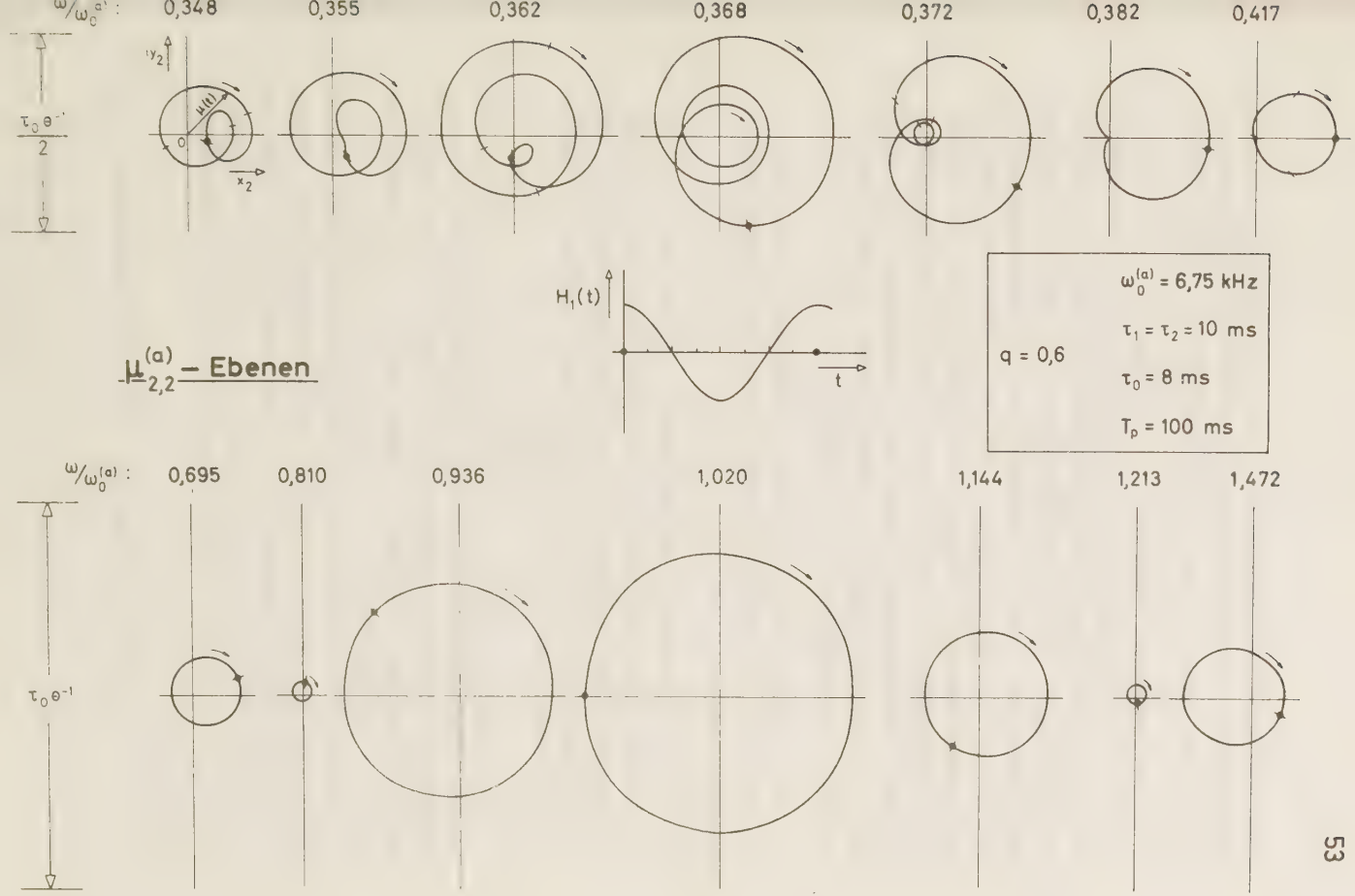
Eine analoge Darstellung für die komplexwertige Zeitfunkfunktion $\mu_{2,2}(a)$ ist in Fig. B.5) gewählt worden. Die Oberwelligkeit ist durch die geradzahligen Vielfachen der Grundfrequenz bestimmt. Der im allgemeinen komplexe zeitliche Mittelwert von $\mu_{2,2}(t)$ geht an der Hauptresonanzstelle durch den Wert Null. Im Bereich der Hauptresonanz überwiegt die

---

[1]) Die zeitliche Zuordnung ergibt sich aus einer getrennt durchgeführten Aufzeichnung der Lösungen $x_1(t), y_1(t)$ (vergl. (B.1)) nach Art der Aufzeichnung von $\mu_{2,0}(a)$ (vergl. Fig. B.3)).

Nachfolgend :

Fig. B.5) Stationäre Lösungen der Alignment-Komponente $\mu_{2,2}(a)$.


ω/ω0(a) :
0,348
0,355
0,362
0,368
0,372
0,382
0,417
τ0 Θ⁻¹
2
y2
x2
μ(t)
0
H1(t)
t
μ(a)2,2 – Ebenen
q = 0,6
ω0(a) = 6,75 kHz
τ1 = τ2 = 10 ms
τ0 = 8 ms
Tp = 100 ms
ω/ω0(a) :
0,695
0,810
0,936
1,020
1,144
1,213
1,472
τ0 Θ⁻¹

Grundwelle mit der Frequenz 2ω . Die aus dieser Darstellung abgeleitete Frequenzabhängigkeit des FOURIER-Koeffizienten $\alpha_2^{(2)}$ entspricht wiederum in etwa dem Verlauf gemäß Fig. A.2).

Die Rechnungen beziehen sich auf einen Frequenzbereich, für den ein Resonanzverhalten im angeregten Zustand unberücksichtigt bleiben kann. Da außerdem die Kinematik im angeregten Zustand nur wenig von dem Verhalten im Grundzustand beeinflußt wird, sind die Lösungen für die Tensorkomponenten $\mu_{2,\varkappa}(b)$ weitgehend unabhängig von der Frequenz des magnetischen Wechselfeldes (vergl. auch Abschnitt B.3)) . In Fig. B.6) sind diese Lösungen analog dem für die Tensorkomponenten des Grundzustandes gewählten Schema dargestellt. Dabei wurde zur Verdeutlichung der Verhältnisse ein möglichst hoher Wert des Parameters q vorgegeben.

Auch hier gelten die früher gewonnenen Aussagen über den zeitlichen Mittelwert und das Oberwellenspektrum der Tensorkomponenten $\mu_{2,\varkappa}(j)$.

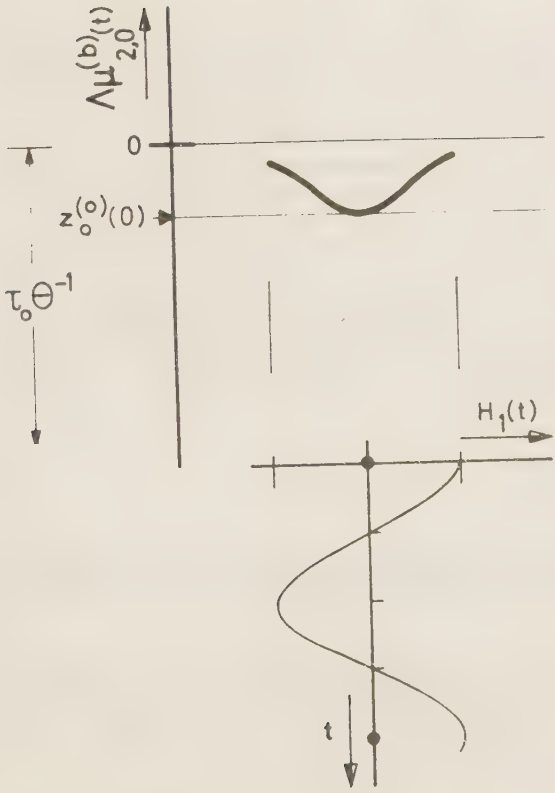
Auf die Bedeutung der Komponenten $\mu_{2,\varkappa}(b)$ für die hier zu beschreibenden Experimente wird weiter unten bei der Herleitung des Streulichtsignals und im Zusammenhang mit der Justierung und Kontrolle der Meßanordnung eingegangen werden (vergl. Abschnitte B.3), C.2) und D.1)).

Mit der experimentellen Untersuchung insbesondere der Resonanzerscheinungen im atomaren Grundzustand ist ein umfangreiches Programm abgesteckt , das einen größeren experimentellen Aufwand erforderlich machen würde . Die Ausmessung etwa des Phasenganges der Grundwelle in $\mu_{2,1}(a)$ bzw. $\mu_{2,2}(a)$ oder die Beobachtung des Einschwingverhaltens dieser Komponenten bei getasteter Amplitude des magnetischen Wechselfeldes (vergl. Abschnitt C.3)) ermöglicht eine direkte Bestimmung der Relaxations-Zeitkonstanten dieser Tensorkomponenten und damit Rückschlüsse auf die räumlichen Symmetrien

---

Nachfolgend :

Fig. B.6) Stationäre Lösungen der Alignment-Komponenten $\mu_{2,\varkappa}(b)$.



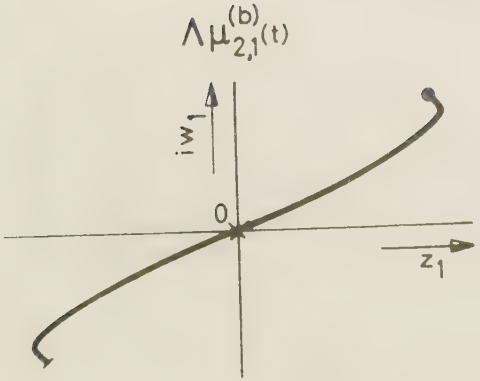
$q = 0{,}8$

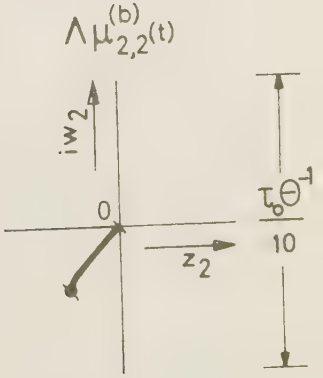
$T_s = 1{,}2\,10^{-7}\,s$

$T_p = 1{,}0\,10^{-1}\,s$

$\Lambda = 10^4$

$\omega_o^{(a)} = 6{,}75\,kHz$





des Relaxationsmechanismus . Wie weiter unten gezeigt werden wird, ist eine solche Messung der Kinamatik des Grundzustandes im Streulicht nur bedingt möglich . Ein direkter Zugang zur Beobachtung des Verhaltens im atomaren Grundzustand sollte in einem "Kreuzstrahl-Experiment" gegeben sein [4] , wo die Absorption eines neben dem eigentlichen Pumplicht eingeführten "Tast-Strahles" gemessen werden kann.

Die hier durchgeführten Experimente beschränken sich auf die Untersuchung des zeitlichen Mittelwertes der Tensorkomponenten $\mu_{2,0}(j)$,in denen gemäß der Verkopplung im ursprünglichen Differentialgleichungssystem wesentliche Grundzüge des Lösungsverhaltens zum Ausdruck kommen.

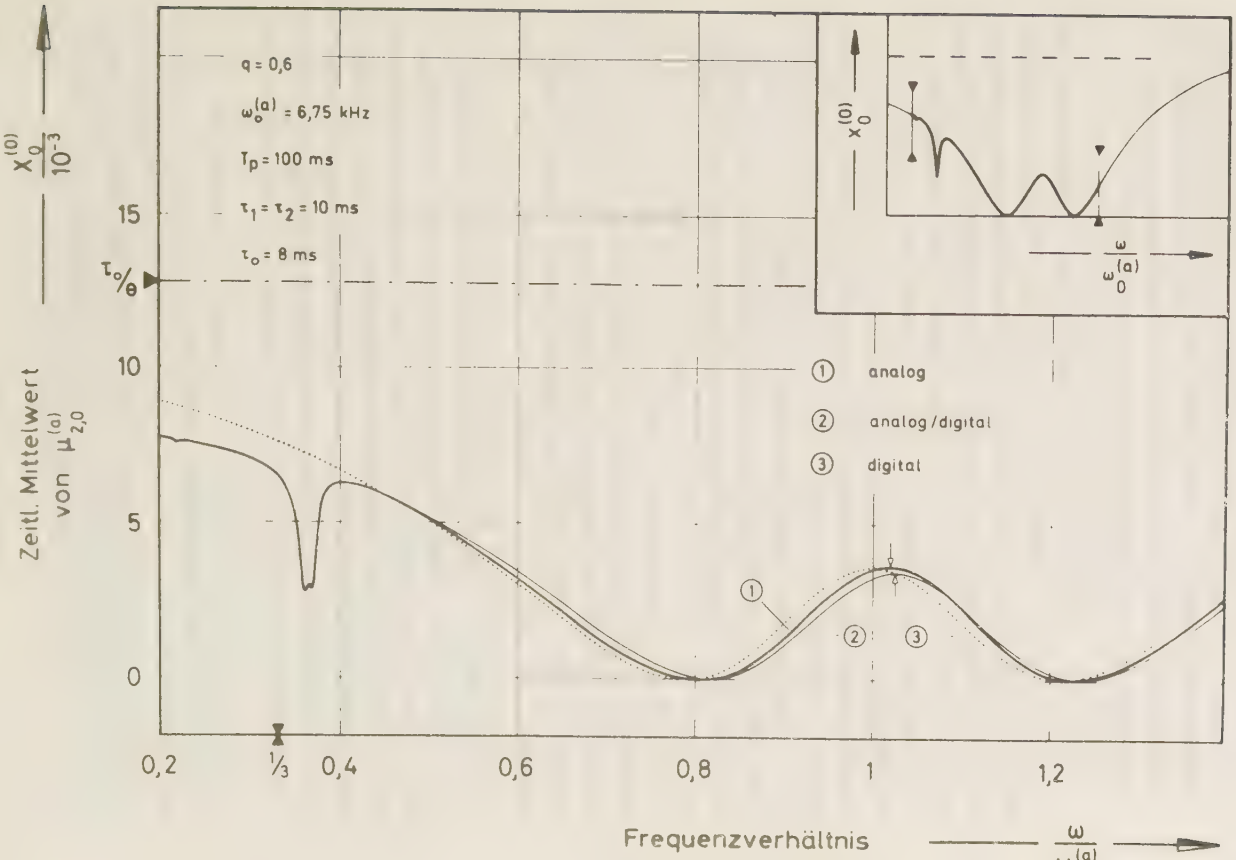
B.3) Die Struktur der Lösungen für den zeitlichen Mittelwert der Alignment-Komponenten $\mu_{2,0}(j)$.

Aus den FOURIER-Darstellungen (A.29/42) der stationären Lösungen $\mu_{2,\varkappa}(j)$ folgt eine FOURIER-Entwicklung der reellen Größen $x_{|\varkappa|}$, $y_{|\varkappa|}$ und $z_{|\varkappa|}$, $w_{|\varkappa|}$ gemäß (B.1/2). Den zeitlichen Mittelwert (FOURIER-Koeffizient der Ordnung n = 0) von x_0 bzw. z_0 bezeichnen wir mit $x_0^{(0)}$ bzw. $z_0^{(0)}$.

1° Die Fig. B.7) zeigt eine Gegenüberstellung der in verschiedenen Näherungen für jeweils den gleichen Satz experimenteller Parameter gerechneten Lösungsanteile $x_0^{(0)}$. Der Wertebereich des Frequenzverhältnisses $\omega/\omega_o^{(a)}$ ist so gewählt, daß Hauptresonanz und subharmonische Resonanzen erfaßt werden. In der Umgebung von $\omega/\omega_o^{(a)} = 0{,}2$ liefern auch Digital-Rechnungen für den Parameterwert $q = 0{,}6$ deutlich den Einfluß der vierten subharmonischen Resonanz (vergl. (B.5)).

Nachfolgend :

Fig. B.7) Stationäre Lösung für den zeitlichen Mittelwert $x_0^{(0)}$ als Funktion der Frequenz (① : Gleichungssystem (B.3), ② : Gleichungssystem (A.26), ③ : Näherung (A.36)).


q = 0,6
$\omega_0^{(a)}$ = 6,75 kHz
T_p = 100 ms
$\tau_1 = \tau_2$ = 10 ms
τ_o = 8 ms
τ_o/θ
15
10
5
0
$\frac{X_0^{(0)}}{10^{-3}}$
Zeitl. Mittelwert von $\mu_{2,0}^{(a)}$
① analog
② analog / digital
③ digital
$x_0^{(0)}$
$\frac{\omega}{\omega_0^{(a)}}$
0,2
⅓
0,4
0,6
0,8
1
1,2
Frequenzverhältnis $\frac{\omega}{\omega_0^{(a)}}$

Die Kurve ① repräsentiert Analogrechner-Daten für die Lösung des Gleichungssystems (B.3). Aufgrund des oben erwähnten Abgleiches im Analog-Netzwerk für den angeregten Zustand kann diese Lösung auch als Lösung des ursprüngli - chen Gleichungssystems (A.7) angesehen werden.

Die Kurve ② stellt die Lösung für das Gleichungssystem (A.26) dar, bei dessen Herleitung die Kopplung zwischen Grund- und Anregungszustand nur in erster Näherung berücksichtigt wurde . Die entsprechenden Rechnungen wurden sowohl mit dem Analogrechner als auch mit Hilfe eines Digitalrech - ners vom Typ TELEFUNKEN TR 4 durchgeführt,wobei im Digital-Programm die FOURIER-Komponenten von $\mu_{2,\pm 1}(a)$ bis zur Ordnung n = 9, diejenigen von $\mu_{2,0}(a)$ und $\mu_{2,\pm 2}(a)$ bis n = 8 berücksichtigt wurden . Nach Abzug eines durch den Produktfehler der Parabel-Multiplizierer eingeführten systematischen Fehlers von 3,5% bleiben die relativen Abweichungen zwischen Digital-und Analog-Daten im Bereich der Haupt-Resonanz unterhalb von 1%. Größere Unterschiede ergeben sich im Bereich der subharmonischen Resonanzen , für die einerseits Näherungsfehler durch Abbruch der FOURIER-Entwicklung im Digital-Programm und.andererseits Oberwellen-Fehler der Pabel-Multiplizierer in Betracht gezogen werden müssen (vergl. Abschnitt D.3.2)).

Die Kurve ③ stellt Digitalrechner-Daten für die Lösung (A.36) dar . Diese Näherung entspricht der Vorstellung, daß es nach Zerlegung des linear polarisierten magnetischen Wechselfeldes in zwei zirkular polarisierte Komponenten genügt , nur die Wechselwirkung der Atome mit einem der beiden zirkular polarisierten Anteile ("resonante Komponente" , vergl. Abschnitt A.2.3)) zu betrachten.

Mit abnehmenden Werten des Parameters q stimmen die in den verschiedenen Näherungen gerechneten Lösungen in zunehmendem Maße überein. Für $|q| \leq 0{,}07$ können die Abweichungen zwischen der strengen Lösung un der Näherung gemäß (A.36) im Hinblick auf die experimentelle Meßgenauigkeit im allgemeinen vernachlässigt werden.

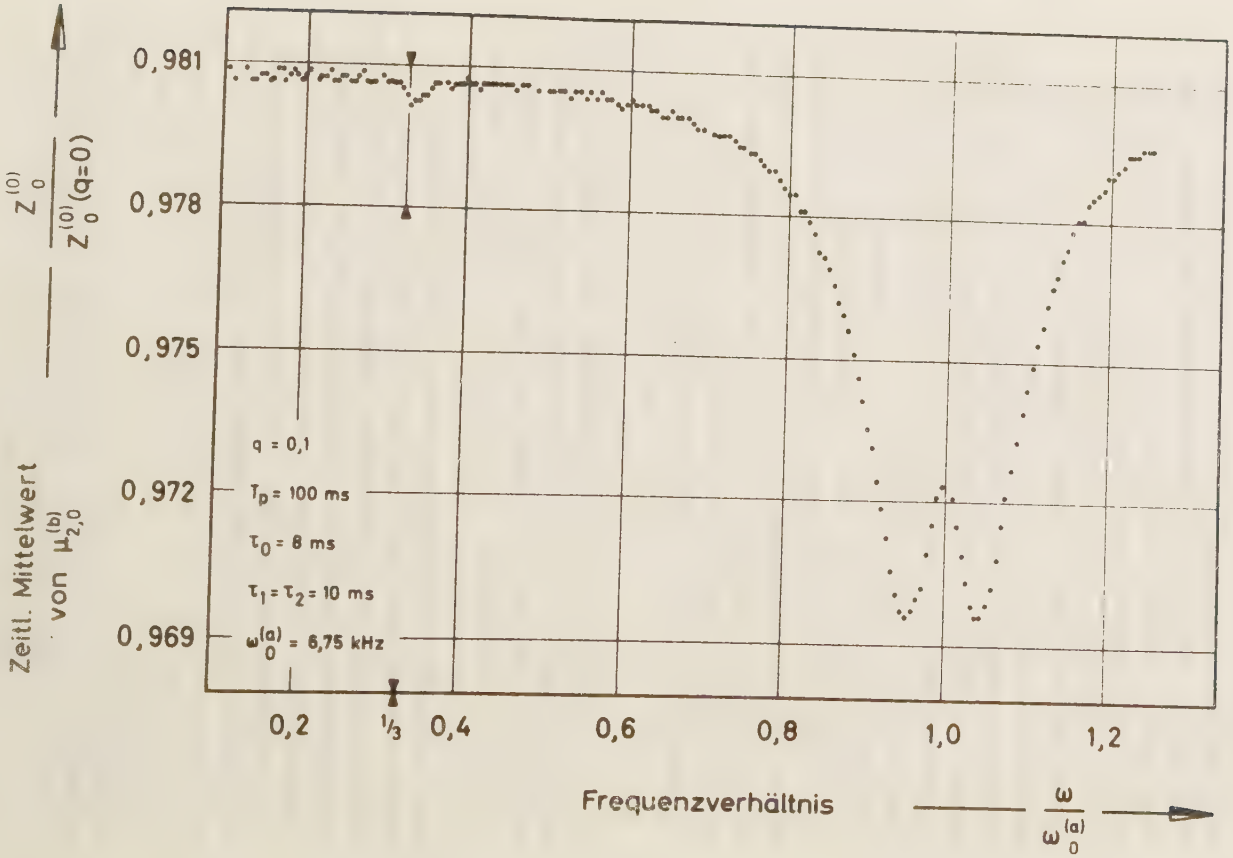
Für höhere q-Werte macht sich im Bereich der Haupt-Resonanz vor allem die BLOCH-SIEGERT-Verschiebung des Resonanz-Extremums bemerkbar . Diese Verschiebung fällt für die Näherung (A.26) (Reduktion auf Grundzustand) etwas größer aus als es der strengen Lösung (Fig.B.7) Kurve ①) entspricht (vergl. Abschnitt D.2)) . Dieser Unterschied in der BLOCH-SIEGERT-Verschiebung der Haupt-Resonanz bezüglich der Näherung (A.26) und der Lösung von (B.3) muß als Einfluß des angeregten Zustandes auf die Kinematik des Grundzustandes gedeutet werden. Er sollte bei der experimentellen Realisierung von q-Werten im Bereich $q \approx 0{,}6$ einer Messung gut zugänglich sein (vergl. Abschnitt D.2)).

Ferner liefert die strenge Lösung eine "Einsattelung" der Resonanzkurve, deren Betrag zwischen den entsprechenden Werten für die Näherungen (A.26/36) liegt.Schließlich ergibt sich selbst nach Abzug der subharmonischen Resonanzen im Gegensatz zur Näherung (A.36) ein unsymmetrischer Verlauf der Resonanzkurve bezüglich der Resonanzstelle $\omega = \omega_o^{(a)}$.

2^o Im Hinblick auf die durchgeführten Experimente ist die zweite subharmonische Resonanz hier von besonderem Interesse. Für sie wird der Amplitudengang in Abhängigkeit vom Parameter q und die Struktur der Resonanzlinie von der Näherung (A.26) gut wiedergegeben. Signifikante Abweichungen zwischen der strengen Lösung und der Näherung (A.26) folgen für die Resonanzverschiebung aus Analogrechner-Daten erst für q-Werte im Bereich $q > 0{,}6$ (vergl. Abschnitt D.3.1)) , wobei die Parabel-Multiplizierer als mögliche Fehlerquellen noch berücksichtigt werden müßten . Es sei hier besonders auf die Herausbildung einer für höhere q-Werte charakteristischen Struktur der Resonanzlinie auch für die zweite subharmonische Resonanz hingewiesen (vergl. auch Fig. D.3)).

Nachfolgend :

Fig. B.8) Relative Änderung des zeitlichen Mittelwertes der Alignment-Komponente $\mu_{2,0}(b)$ (angeregter Zustand) als Funktion der Frequenz.


0,981
0,978
0,975
0,972
0,969
$\frac{Z_0^{(0)}}{Z_0^{(0)}(q=0)}$
Zeitl. Mittelwert von $\mu_{2,0}^{(b)}$
q = 0,1
T_p = 100 ms
τ_0 = 8 ms
$\tau_1 = \tau_2$ = 10 ms
$\omega_0^{(a)}$ = 6,75 kHz
0,2
1/3
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
Frequenzverhältnis
$\frac{\omega}{\omega_0^{(a)}}$

Die vorgenommenen Rechnungen beschränken sich auf den Parameterbereich $q \leq 0{,}8$. Diese Einschränkung beruht vor allem auf der Unzuverlässigkeit der Analogrechner-Daten bei der Untersuchung höherer subharmonischer Resonanzen;sie wird im Hinblick auf das Experiment durch den endlichen Klirrfaktor des verwendeten Niederfrequenz-Verstärkers nahe gelegt (vergl. Abschnitt C.1)).

3° Das von der im folgenden Abschnitt beschriebenen polarisationsempfindlichen Meßanordnung registrierte Streulichtsignal wird in erster Linie durch die Verteilung der Atome im angeregten Zustand bestimmt und zwar so, daß nach einer Mittelwert-Bildung von der Tensorkomponente $\mu_{2,0}(b)$ der Lösungsanteil $z_0^{(0)}$ isoliert wird.

Aufgrund der schwachen Kopplung zwischen Grund- und Anregungszustand sind für einen festen Wert des Parameters q die relativen Änderungen in $z_0^{(0)}$ nur schwach ausgeprägt (ca. 1,3%) und nahezu ausschließlich durch $x_0^{(0)}$ bestimmt. In Fig. B.8) sind Analogrechner-Daten für $z_0^{(0)}$ wiedergegeben. Eine Untersuchung dieser Ergebnisse bestätigt die Abschätzung für die relative Unsicherheit der Analog-Daten , die weniger als 0,1% betragen sollte [1]).

Diese Rechnungen wie auch eine allgemeine Diskussion des Gleichungssystems (B.3) - etwa anhand der Analog-Darstellung - legt es nahe,unter den Bedingungen einer schwachen Kopplung zwischen Grund- und Anregungszustand für z_0 eine Zerlegung der Form

$$z_0 = -\frac{8}{3} x_0 + z_{0,1} \tag{B.6}$$

---

[1]) Die stärkere Streuung der Daten bei tiefen Frequenzen ist auf einen Integrationsfehler bei der Bildung des zeitlichen Mittelwertes zurückzuführen.Die Integration sollte mit einer Genauigkeit von ca. 0,1% in Gegenwart einer starken Modulation der z_0-Komponente vorgenommen werden (vergl. Fig. B.6)). Bezüglich der damit geforderten Integrationszeitkonstanten galt es, einen annehmbaren Kompromiss zu finden.

vorzunehmen. Dabei kann der Beitrag $z_{0,1}$ in erster Näherung dadurch berechnet werden , daß man im Gleichungssystem für den angeregten Zustand den Einfluß der Kinematik des Grundzustandes vernachlässigt. Die Rechnung liefert :

$$z_{0,1} = - V \frac{\beta}{3} \left[1 + 3\epsilon^2 \frac{1 + 4\xi^2 + \epsilon^2}{1 + 5\xi^2 + (2\xi^2 - \epsilon^2)^2 + 2\epsilon^2} \right]^{-1} \tag{B.7}$$

mit

$$\xi = g h_0 \quad , \quad \epsilon = \xi \, q \cos \omega t \quad .$$

Die daraus folgende q-Abhängigkeit des zeitlichen Mittelwertes $z_0^{(0)}$ kann für hinreichend kleine Werte von $|q|$ leicht angegeben werden :

$$z_0^{(0)}(q) = z_0^{(0)}(0) \left[1 - m_z q^2 \right] \tag{B.8}$$

mit

$$m_z = \frac{3}{2} \frac{4 + \xi^{-2}}{4 + 5\xi^{-2} + \xi^{-4}} \quad .$$

In Fig. B.9) werden Analogrechner-Daten für die Funktion $z_0^{(0)}(q)$ der Näherungslösung gemäß (B.8) gegenübergestellt. Die Streuung der Analog-Rechnungen können auf Produktfehler der Parabel-Multiplizierer zurückgeführt werden.

Die mit wachsender Wechselfeldstärke (steigenden Werten von $|q|$) zunehmende Empfindlichkeit von $z_0^{(0)}$ gegenüber q-Wert-Schwankungen wird bei der Interpretation der Meßergebnisse von Bedeutung sein (vergl. Abschnitt C.3)). Außerdem ergibt sich damit die Möglichkeit einer unmittelbaren Kontrolle der im Experiment für den Parameter q eingestellten Werte (vergl. Abschnitt D.1)).

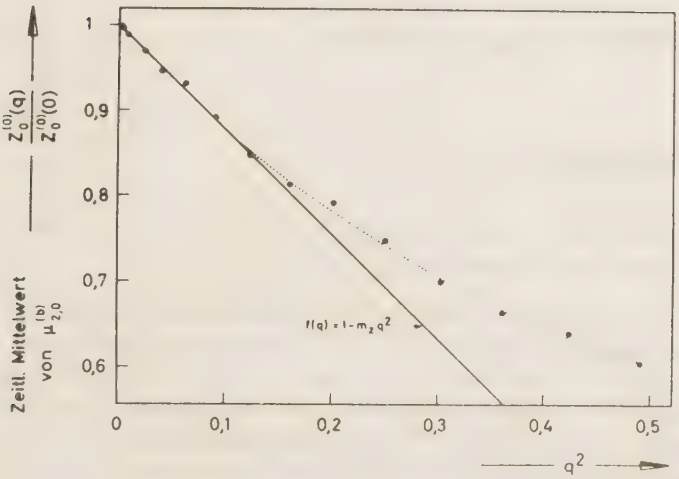


Fig. B.9) Relative Änderung des zeitlichen Mittelwertes der Alignment-Komponente $\mu_{2,0}(b)$ als Funktion des Parameters q (— : Näherung (B.8), ••• : Anpassung der Analogrechnungen ● , Zeitkonstanten wie in Fig. B.8) , $\omega/\omega_0^{(a)} = 1{,}5$).

Aus diesem Überblick über die Struktur der Lösungen für den zeitlichen Mittelwert von $\mu_{2,0}(j)$ folgt, daß Amplituden- und Frequenzgang der zweiten subharmonischen Resonanz sowie die BLOCH-SIEGERT-Verschiebung der Haupt-Resonanz für einen Vergleich zwischen theoretischen und experimentellen Ergebnissen besonders geeignet sind.Dabei wäre es wünschenswert, möglichst hohe Werte des Parameters q im Experiment zu realisieren. Auf die damit verbundenen Schwierigkeiten wird im folgenden Abschnitt eingegangen werden.

C.) Meßanordnung und Meßverfahren.

C.1) Die Meßanordnung.

Der Aufbau der Meßanordnung ist in Fig. C.1) in seinen wesentlichen Teilen dargestellt.

Im Zentrum des durch eine HELMHOLTZ-Spulen-Anordnung (mittlerer Wicklungsradius : 20 cm) erzeugten magnetischen Führungsfeldes $\vec{H}_o$ befindet sich eine würfelförmige Quarzglas-Küvette [1]). Sie dient als Streugefäß und enthält das zu untersuchende isotopenreine ^{201}Hg (Anreicherungsgrad: 88,7%). Eine zweite, konzentrische HELMHOLTZ-Spulen-Anordnung (mittlerer Wicklungsradius: 10 cm) dient zur Erzeugung des senkrecht zu $\vec{H}_o$ orientierten magnetischen Wechselfeldes $\vec{H}_1$. Das in Richtung von $\vec{H}_o$ einfallende Pumplicht geht von einer isotopenreinen Quecksilber-Spektrallampe (^{198}Hg, Anreicherungsgrad : 75,5%) aus,die als Hochfrequenzentladung in einem $\lambda/4$-Resonator brennt.

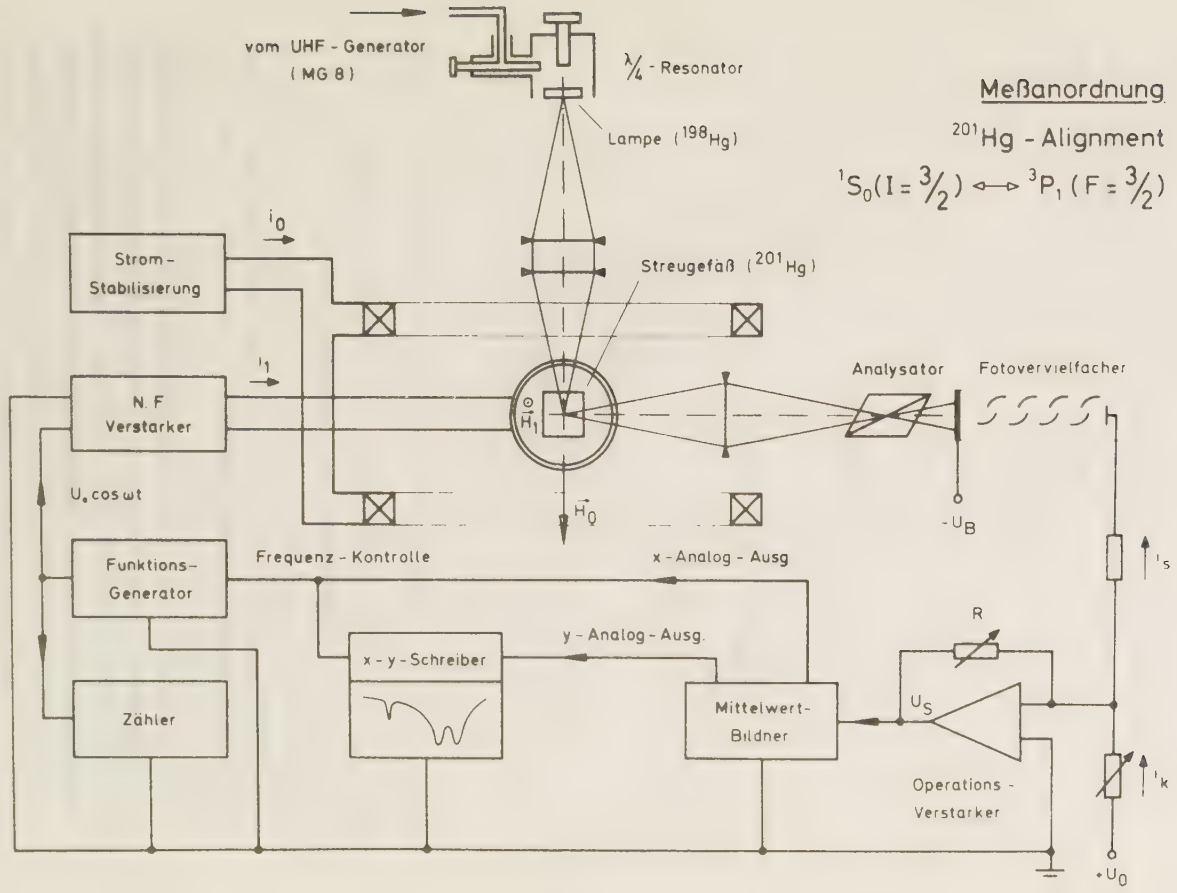
Die im optischen Pumpprozess wirksame Spektralkomponente ist die Quecksilber-Resonanzlinie (Interkombinationslinie) λ = 253,7 nm [2]). Isotopie-Verschiebung und Hyperfeinstruktur (vergl. Fig. C.2)) ermöglichen unter Berücksichtigung der DOPPLER-Breite der Lichtquelle eine selektive Anregung des

---

[1]) Für Küvetten und Optik wurde chemisch reines Quarzglas "ULTRASIL" der Firma HERAEUS verwendet.

[2]) Die Resonanzlinie λ = 185,0 nm liegt im Vakuum-Ultraviolett.

Nachfolgend :
Fig. C.1) Meßanordnung (Prinzip) .


vom UHF - Generator
(MG 8)
λ/4 - Resonator
Lampe (198Hg)
Meßanordnung
201Hg - Alignment
1S0(I = 3/2) ⟷ 3P1 (F = 3/2)
i0
Strom - Stabilisierung
Streugefäß (201Hg)
i1
N. F Verstarker
Analysator
Fotovervielfacher
H1
H0
U0 cos ωt
-UB
Funktions- Generator
Frequenz - Kontrolle
x - Analog - Ausg
y - Analog - Ausg.
x - y - Schreiber
R
Is
Zähler
Mittelwert- Bildner
US
Operations - Verstarker
Ik
+U0

Überganges $^1S_0(I = 3/2) \leftrightarrow {}^3P_1(F = 3/2)$ im ^{201}Hg-Atom.

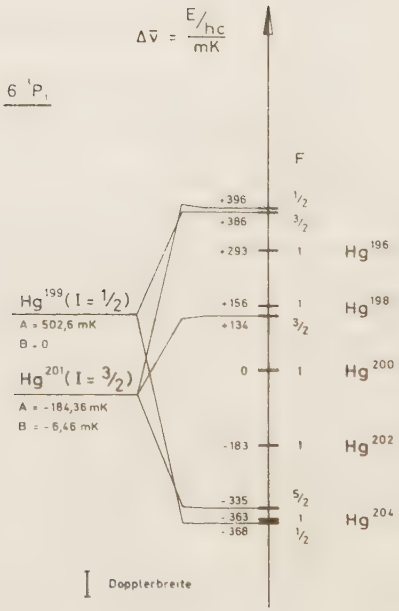


Fig. C.2) Isotopie-Verschiebung und Hyperfeinstruktur der Hg-Resonanzlinie λ = 253,7 nm.

Im Folgenden sollen die technischen Einzelheiten der Anordnung kurz beschrieben werden.

Der Eingangswiderstand des $\lambda/4$-Resonators zur Anregung der Hg-Spektrallampe kann durch variable Abstimmung und Ankopplung während des Betriebes an den Innenwiderstand eines kommerziellen Magnetron-Generators (MG8 / 2,4 GHz; Ausgangsleistung 20...200 Watt) optimal angepaßt werden . Die Anpassung wird über einen Richtkoppler mit Hilfe eines selektiven

Voltmeters kontrolliert. Die Lampentemperatur wird durch einen Preßluftstrom geregelt.

Der Spulenstrom i_o zur Erzeugung des Führungsfeldes $\vec{H}_o$ wird einem stromstabilisierten Netzgerät entnommen ; er wird über den Spannungsabfall an einem thermisch stabilisierten Strom-Fühler-Widerstand mit Hilfe eines Digitalvoltmeters gemessen.

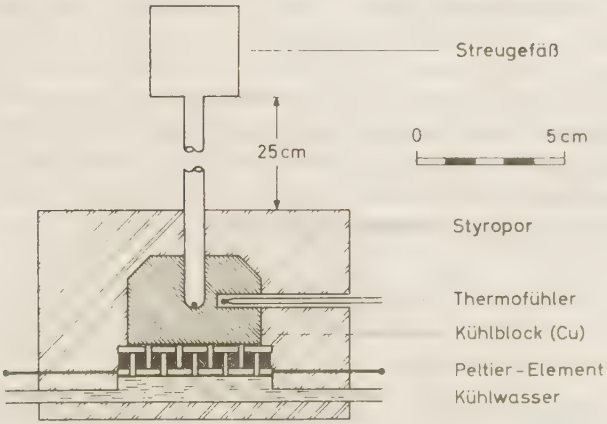


Fig. C.3) Streugefäß mit PELTIER-Kühlelement.

Die Form des Streugefäßes ist in Fig. C.3) wiedergegeben. Es besteht aus einer würfelförmigen Küvette,dem eigentlichen Reaktionsvolumen, mit einem Rohrfortsatz , dessen unteres Ende mit Hilfe eines PELTIER-Elementes auf einer Temperatur von $-25^{o}C$ stabilisiert ist. Hier kondensiert der überweigende Teil des unter Vakuum (ca. 10^{-6}Torr) eindestillierten ^{201}Hg (Einwaage ca. 1 mg) , sodaß sich im Streugefäß nach einiger Zeit eine dem Dampfdruck des Quecksilbers bei $-25^{o}C$ entsprechende Teilchenzahldichte von ca.10^{12} cm^{-3} einstellt [5] .

Das von den Atomen im Streugefäß während des optischen Pumpprozesses senkrecht zu $\vec{H}_0$ emittierte Streulicht bildet die primäre Meßgröße. Das Innere des Streugefäßes wird durch einen Analysator (GLAN-Luft-Prisma) hindurch auf die Kathode eines Fotovervielfachers (VALVO 53 UVP) abgebildet . Die um die Beobachtungsrichtung drehbare Schwingungsebene des Analysators [1]) wird in den hier beschriebenen Experimenten so justiert, daß sie die Richtung von $\vec{H}_0$ enthält (vergl. Abschnitt C.2) und Anhang III).

Der Anodenstrom i_s des Fotovervielfachers bildet das primäre elektronische Signal . Wie im Aschnitt C.2) gezeigt werden wird , erscheint das Resonanzsignal auf einem hohen Untergrund (vergl. auch Fig. B.8)). Zur Abtrennung dieses Gleichstromanteiles in i_s wird die Differenz Δi zwischen i_s und einem fest eingestellten Kompensationsstrom i_k gebildet. Über einen als Strom-Spannungswandler mit niedrigem Eingangswiderstand geschalteten Operationsverstärker wird dann breitbandig die Signalspannung U_s abgeleitet :

$$U_s = R\,\Delta i = R(i_s - i_k) \qquad (C.1)$$

Das Signal-zu-Rausch-Verhältnis (Spannungsverhältnis) am Ausgang des Operationsverstärkers betrug im Normalfall etwa -20 db. Dabei zeigte das Rauschspektrum starke Komponenten im niederfrequenten Bereich , die vor allem auf Instabilitäten der Hochfrequenzentladung in der Lampe (Schwankungen der Pumpzeitkonstanten T_p trotz Netzspannungsstabilisierung des UHF-Generators) zurückgeführt werden konnten . Eine konventionelle Filtertechnik (Tiefpaß) zur Eliminierung dieser niederfrequenten Rauschkomponenten erschien wegen zu starker Einengung der Bandbreite als unzweckmäßig.

---

[1]) Schwingungsebene ($\vec{E}$-Vektor) des hindurchgehenden linear polarisierten Lichtes.

Zur Verbesserung des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses wird ein Mittelwertbildner [24] vom Typ TMC CAT 400/C eingesetzt. Vom Iterationszyklus des Mittelwertbildners wird in fester zeitlicher Zuordnung ein Iterationszyklus im Meßprozeß durch Steuerung eines experimentellen Parameters X abgeleitet . Nach N Durchgängen repräsentiert der Speicherinhalt des Mittelwertbildners eine Signalfunktion $\bar{U}_s(X)$ (400 Punkte), deren Signal-zu-Rausch-Verhältnis um den Faktor $N^{1/2}$ größer ist als das der ursprünglichen Signalfunktion $U_s(X)$ am Ausgang des Operationsverstärkers . Speicheradresse und Adresseninhalt können nach einer Digital-Analog-Umsetzung auf einem x-y-Schreiber registriert werden.

In den hier durchgeführten Experimenten war der vom Iterationszyklus des Mittelwertbildners gesteuerte experimentelle Parameter meist die Frequenz ν des magnetischen Wechselfeldes $\vec{H}_1$: die Speicheradresse wird als Analogspannung (CAT x-Analog-Ausgang) einem NF-Generator zugeführt , dessen Ausgangsfrequenz durch eine externe Spannung gesteuert werden kann (hp 3000A/Funktionsgenerator). Über einen NF-Leistungsverstärker wir dann der Spulenstrom i_1 der $\vec{H}_1$-Feldapulen erzeugt (vergl. Fig. C.1)).

Gemessen wird der Spulenstrom i_1 über den Spannungsabfall an einem Strom-Fühler-Widerstand . Diese Spannung dient zugleich als Gegenkopplungs-Signal im NF-Verstärker , sodaß der Einfluß einer frequenzabhängigen Änderung der induktiven Last auf den Feldstrom i_1 weitgehend ausgeregelt wird (vergl. auch Abschnitt C.3)).

Der Oberwellengehalt des Feldstromes i_1 kann während der Messungen mit Hilfe eines Tonfrequenzanalysators(R&S Typ FTA) abgefragt werden . Dieser Oberwellengehalt setzt sich aus zwei Anteilen zusammen :

Ein konstanter Anteil, dessen relativer Beitrag für die zweite Oberwelle -57 db beträgt, kann dem Funktionsgenerator zugeordnet werden . Er entspricht der technischen Konzeption dieses Gerätes, die eine Tangentenapproximation der sinusförmigen Ausgangsspannung einschließt.

Ein zweiter , von Aussteuerung und Frequenz abhängiger Oberwellenanteil wird vom NF-Verstärker selbst erzeugt. Legt man für seinen relativen Beitrag zur Frequenz 3ν eine obere Grenze von -40 db fest , so ergibt sich mit induktiver Last ein optimaler Übertragungsbereich von ca. 500 Hz bis 3 kHz. Soll dieser Frequenzbereich die Haupt-Resonanz und zweite subharmonische Resonanz überdecken , so ist damit für die Resonanzfrequenz $\nu_o^{(a)}$ ein Wert von etwa 2 kHz vorgegeben ($|H_o| \approx 7$ Oe). Dieser Wert der Resonanzfrequenz ergibt zusammen mit der oben eingeführten Aussteuerungsgrenze für den erreichbaren q-Wert eine obere Schranke vom Betrag 0,5 (vergl. auch Fig. D.6)).

Eine Reduzierung des relativen Beitrages der Oberwellen in $\vec{H}_1$ könnte dadurch erreicht werden , daß das Spulensystem zur Erzeugung des magnetischen Wechselfeldes als Resonanzkreis ausgebildet wird. Dann aber ist es schwierig,die Resonanzerscheinungen im atomaren System als Funktionen der Frequenz des Wechselfeldes auszumessen . Eine kontinuierliche Variation des Führungsfeldes $\vec{H}_o$ ist unzweckmäßig , weil im Gegensatz zur Näherungslösung (A.36) für höhere q-Werte im linear polarisierten Feld die Resonanzerscheinungen in ihrem Frequenzverhalten explizit von der Resonanzfrequenz $\omega_o^{(a)}$ abhängig sind.

Die Meßanordnung ist so ausgelegt , daß bei konstanter Frequenz des magnetischen Wechselfeldes bei Beobachtung von Einschwingvorgängen der magnetischen Resonanz dem Iterationszyklus des Mittelwertbildners ein Schaltsignal zur Tastung der $\vec{H}_1$-Amplitude zeitlich fest zugeordnet werden kann.

Die zur Steuerung der verschiedenen Meßprozesse erforderliche konventionelle Schaltelektronik ist aus Gründen der Übersichtlichkeit in der Figur C.1) nicht wiedergegeben.

C.2) Das Streulicht-Signal.

Im Zentrum des magnetischen Führungsfeldes $\vec{H}_o$ wählen wir ein Koordinatensystem $\sum(x,y,z)$, das der Beschreibung des atomaren Systems im Streugefäß zugrunde gelegt wird. Die Richtung $\vec{e}_z$ falle mit der Richtung des Führungsfeldes $\vec{H}_o$, die Richtung $\vec{e}_x$ mit der Richtung des magnetischen Wechselfeldes $\vec{H}_1$ zusammen (Fig. C.4)).

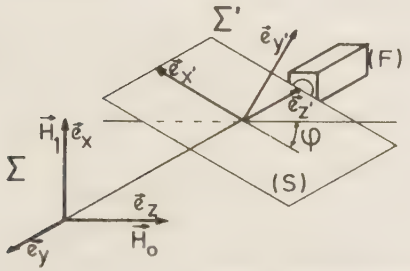


Fig. C.4) Orientierungen der Streulicht-Meßanordnung ((S): Schwingungsebene des Analysators; (F): Fotovervielfacher).

In der Richtung $-\vec{e}_y$ befinde sich der Analysator und der Fotovervielfacher zur Beobachtung des Resonanzstreulichtes.

Vernachlässigen wir die endliche Apertur des abbildenden Streulichtbündels und setzen eine ideale Empfindlichkeitsmatrix des Analysators voraus , so wird die Streulicht-Meßanordnung repräsentiert durch den Projektor $^{(1)}\rho_{\vec{k}}$ auf einen Photonenzustand (ebene Welle) der Ausbreitungsrichtung $\vec{k}/|\vec{k}| = -\vec{e}_y$ mit einer Linear-Polarisation , die der Lage der Schwingungsebene des Analysators entspricht. Wir beschreiben diesen Streulichtzustand in einem Koordinatensystem $\sum'(x',y',z')$, dessen $\vec{e}_{z'}$-Achse mit der Ausbreitungsrichtung $-\vec{e}_y$ zusammenfällt und dessen $\vec{e}_{x'}$-Achse ganz in der Schwingungsebene des Analysators liegt. Den Winkel zwischen dem Vektor $\vec{e}_{x'}$ und der y,z-Ebene (vergl. Fig. C.4)) bezeichnen wir mit φ .

Die Grundlagen zur Berechnung der mit dieser Streulicht-Meßanordnung registrierten Lichtintensität (Energiestromdichte) sind in C.D. ausführlich dargestellt. Einige speziellere Ableitungen für den hier vorliegenden Fall sind im Anhang III aufgeführt.

Für den Fall $\varphi = 0, \pm\pi$ kann die Streulicht-Meßanordnung repräsentiert werden durch den Projektor auf den π-Anteil des Streulichtes . Das elektronische Signal am Ausgang des Fotovervielfachers ist dann gegeben durch :

$$i_s = v_s \frac{1}{T_s} \left[\frac{P_b}{3} + \frac{8}{15} \mu_{2,0}(b) \right] \qquad (C.2)$$

In dem Proportionalitätsfaktor v_s sind die als konstant angesehenen physikalischen Parameter wie die Teilchenzahldichte im Streugefäß, der Absorptionskoeffizient des Analysators, die Quantenausbeute und der Verstärkungsfaktor des Fotovervielfachers summarisch zusammengefaßt. Außerdem könnte in v_s die endliche Apertur des abbildenden Streulichtbündels in erster Näherung berücksichtigt werden.

Damit ist die Signalgröße i_s zurückgeführt auf die Besetzungswahrscheinlichkeit P_b und die Alignment-Komponente $\mu_{2,0}(b)$ des atomaren Anregungszustandes. Insofern die Lösungen P_b und $\mu_{2,0}(b)$ als Folge der Verkopplung im ursprünglichen System der Bewegungsgleichungen (A.1) durch die Lösungen für die Tensorkomponenten des atomaren Grundzustandes bestimmt werden, enthält das Streulicht-Signal mittelbar eine Information über die Kinematik des atomaren Grundzustandes.

Zur Untersuchung dieser Verhältnisse betrachten wir die Differentialgleichung für P_b gemäß (A.8) . Nach einem Einschwingvorgang, dessen Dauer von der Größenordnung T_s ist, erhalten wir für die stationäre Lösung :

$$P_b = \frac{T_s}{T_p} \frac{1}{1 + T_s/T_p} \left[1 - \frac{4}{5} \mu_{2,0}(a) \right] .$$

Da $1/T_s$ als groß gegenüber allen anderen Änderungsgeschwindigkeiten des Systems angenommen werden kann (insbesondere $T_s << T_p$),können wir den Einschwingvorgang unberücksichtigt lassen und von der stationären Lösung in der Form :

$$P_b = \frac{T_s}{T_p} \left[1 - \frac{4}{5} \mu_{2,0}(a) \right] \tag{C.3}$$

ausgehen [1]). Damit folgt für i_s gemäß (C.2) aufgrund der Definitionen (B.1/2/3) :

$$i_s = \frac{v_s}{3} \omega_o \left[5P + 8\alpha z_0 - 4Px_0\right] \quad . \tag{C.4}$$

Wir machen nun Gebrauch von der Zerlegung (B.6) und bezeichnen den zeitlichen Mittelwert von $z_{0,1}$ gemäß (B.7) mit $z_{0,1}^{(0)}$. Wählen wir bei vorgegebener Stärke des magnetischen Wechselfeldes und fester Pumpzeitkonstanten den Kompensationsstrom i_k so, daß

$$i_k = \frac{v_s}{3} \omega_o \left[5P + 8\alpha z_{0,1}^{(0)}\right] \tag{C.5}$$

gilt, so folgt für die Signalspannung U_s :

$$U_s = - R\, v_s \frac{1}{T_p} \frac{2^2 \cdot 7}{3 \cdot 5^2} x_0^{(0)} + U(t) \quad , \tag{C.6}$$

---

[1]) Daraus ergibt sich die Berechtigung , dort wo P_a in den Bewegungsgleichungen explizit auftritt, $P_a = 1$ zu setzen (vergl. (A.8) und (A.26)).

wobei U(t) derjenige Anteil der Signalspannung ist,der durch die Modulation von z_0 und x_0 mit den Frequenzen $2n\omega$ ($n = 1,2,\ldots$) bestimmt wird . Da keine festen Phasenkorrelationen zwischen dem magnetischen Wechselfeld $\vec{H}_1$ und dem Iterationszyklus des Mittelwertbildners bestehen,wird dieser Spannungsanteil U(t) durch die Mittelwertbildung eliminiert.

Der Modulationsanteil U(t) der Signalspannung kann dazu benutzt werden,die Streulicht-Meßanordnung auf die Bedingung $\varphi = 0,\pm\pi$ zu justieren . Für diese Einstellung verschwindet der Beitrag von $\mu_{2,\pm1}(b)$ zum Streulicht-Signal (minnimaler Beitrag der ungeradzahligen Oberwellen insbesondere der Grundwelle) und U(t) enthält nur die Modulationsanteile von $\mu_{2,0}(b)$ und $\mu_{2,0}(a)$, d.h. im wesentlichen die Frequenz $2\,\omega$. Dabei überwiegt der Beitrag von $\mu_{2,0}(b)$ denjenigen von $\mu_{2,0}(a)$. Ausgehend von den experimentellen Parametern T_s und T_p erhält man für das Verhältnis der Gewichtsfaktoren von z_0 und x_0 in (C.4) :

$$\frac{8\alpha}{4P} \approx 25 \qquad (C.7)$$

wenn man für Λ einen Wert gemäß (A.48) zugrunde legt . Für $|q| < 1$ ist eine obere Schranke für die Modulationsanteile in x_0 durch $\tau_0/\theta \approx 10^{-2}$ und in z_0 durch $\beta/3 \approx 10^{-2}$ gegeben (vergl. Fig. B.3/6)) , sodaß der Signalanteil U(t) im wesentlichen auf die Modulation von z_0 zurückzuführen ist.

C.3) Meßverfahren und primäre Meßdaten.

Bevor eine genauere Untersuchung der Resonanzerscheinungen im starken magnetischen Wechselfeld vorgenommen wurde, bestand eine erste Aufgabe in der Bestimmung der Zeitkonstanten τ_o, $\tau_1(,\tau_2)$ und T_p . Diese Messungen wurden in einem schwachen magnetischen Wechselfeld ($q \leq 0{,}07$, vergl. Abschnitt B.3)) durchgeführt , sodaß die analytisch übersichtliche Lösung (A.36) der Bewegungsgleichungen als gute Näherung angesehen werden konnte.

1° Die "longitudinale" Relaxationszeitkonstante τ_o. Die Zeitkonstante τ_o kann dem Relaxationsverhalten der Tensorkomponente $\mu_{2,0}(a)$ nach Abschalten des Wechselfeldes H_1 direkt entnommen werden. Gemäß (A.28) ist das Zeitverhalten von $\mu_{2,0}(a)$ dann durch einen exponentiellen Verlauf mit der Zeitkonstanten τ_o beschrieben. Die Fig. C.5) zeigt Meßkurven, die den Einschwingvorgang der magnetischen Resonanz [1]) und den exponentiell verlaufenden "Rückpump-Prozess" wiedergeben. Die Auswertung des exponentiellen Kurventeiles ergab für die Zeitkonstante τ_o den Wert :

(C.8) $$\tau_o = (8{,}2 \pm 0{,}1) \text{ ms} \quad .$$

---

[1]) Die Struktur des Einschwingvorganges ist abhängig von dem Wert des Parameters q und der Verstimmung des eingeschalteten magnetischen Wechselfeldes gegenüber der Resonanzfrequenz $\nu_o^{(a)}$ [21]. Analog-Rechnungen ergaben eine gute Übereinstimmung mit dem Experiment. Zu ähnlichen Beobachtungen beim optischen Pumpen von ^{199}Hg vergleiche auch [5].

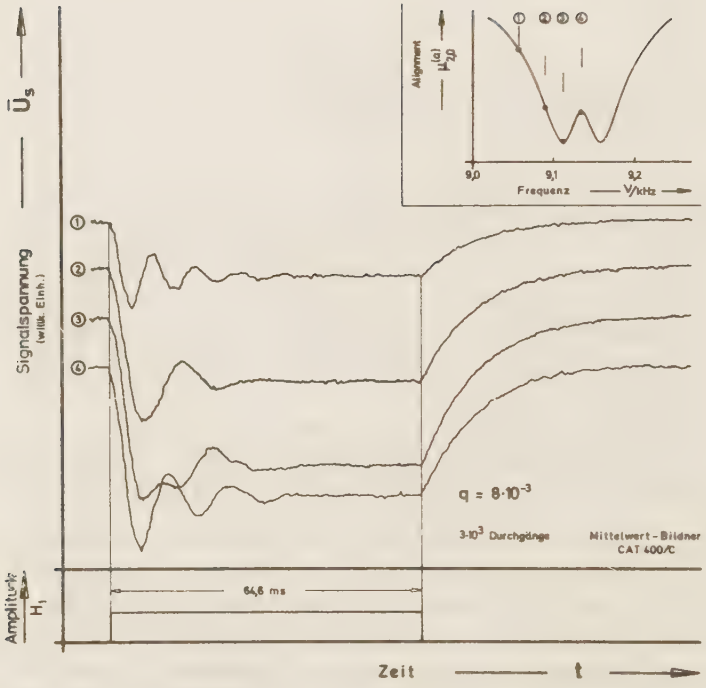


Fig. C.5) Meßkurven zum Verhalten der Alignment-Komponente $u_{2,0}^{(a)}$ beim Ein- und Ausschalten des magnetischen Wechselfeldes (Kurvenparameter: Verstimmung der Frequenz von $\vec{H}_1$ gegenüber der Haupt-Resonanzfrequenz, vergl. Nebenfigur; zugunsten der Übersichtlichkeit wurden die Meßkurven in Ordinatenrichtung verschoben).

Die "transversalen" Relaxationszeitkonstanten. Zur Messung der Zeitkonstanten τ_1 , τ_2 wurde eine hinreichend große Führungsfeldstärke eingestellt ($\nu_o^{(a)} \approx 10$ kHz) , so daß unter Berücksichtigung der Abschätzung (A.37)

(C.9) $$\tau_1 = \tau_2$$

vorausgesetzt werden konnte. Aus der Lösung (A.36) für den zeitlichen Mittelwert $\alpha_0^{(0)}$ kann dann eine Beziehung hergeleitet werden, die die Zeitkonstante τ_1 mit der Halbwertsbreite der Haupt-Resonanz verknüpft :

$$(C.10) \qquad (\Delta\nu_{1/2})^2 = (1/\pi\tau_1)^2 + [3{,}30 + 2{,}80(\tau_0/\tau_1)](\omega_1/2\pi)^2 .$$

Die Gültigkeit dieser Näherung ist auf kleine Wechselfeldstärken beschränkt [5] . Zur Bestimmung von ω_1 wird der Spulenfaktor H_1/i_1 mit Hilfe einer FÖRSTER-Sonde gemessen.

Trägt man das Quadrat der Halbwertsbreite über dem Quadrat der Amplitude des Wechselfeld-Stromes i_1 auf , so folgt τ_1 aus einer Extrapolation auf die Stromamplitude Null . Die so ausgeführten Messungen lieferten für τ_1 den Wert :

$$(C.11) \qquad \tau_1 = (10{,}1 \pm 0{,}3) \text{ ms} \quad .$$

Die Absolutmessung von H_1 [1]) erlaubt es , aus der Steigung der Funktion $(\Delta\nu_{1/2})^2 = f(\omega_1^2)$ das Verhältnis τ_0/τ_1 und damit erneut τ_0 zu bestimmen. Ein Vergleich mit dem direkt gemessenen Wert (C.8) bestätigte - innerhalb der Fehlergrenzen - die Selbstkonsistenz der Messungen.

Mit der Kenntnis der Zeitkonstanten τ_0 und $\tau_1 = \tau_2$ sind wesentliche Bestimmungsstücke der Spektralfunktion $F(\Delta\omega)$ in (A.36) gegeben. Bei festgelegter Führungsfeldstärke H_0 (vorgegebener Resonanzfrequenz $\nu_0^{(a)}$) sowie bekannter Amplitude H_1 und Frequenz des Wechselfeldes kann die Lösung $x_0^{(0)}$ [2]) bis auf den Amplitudenfaktor τ_0/θ berechnet werden.

---

[1]) Zu Kontrollmessungen der relativen Amplitude des magnetischen Wechselfeldes (q-Wert) vergleiche auch Abschnitt D.1).

[2]) Wegen der oben eingeführten Beschränkung auf kleine Wechselfeldstärken kann $\alpha_0^{(0)} = x_0^{(0)}$ gesetzt werden.

Die Pumpzeitkonstante T_p. Wird der Kompensationsstrom i_k so eingestellt, daß außerhalb der Haupt-Resonanz ($x_0^{(0)} \approx \tau_o/\theta$, $F(\Delta\omega) << 1$) für den Wert $i_{k,0}$ das Stromsignal Δi (vergl. (C.1)) verschwindet, so folgt für die relative Signalamplitude $\Delta_0 i/i_{k,0}$ im Resonanzfall :

$$(C.12) \qquad \frac{\Delta_0 i}{i_{k,0}} = \frac{i_s^{(0)}(\nu_o^{(a)}) - i_{k,0}}{i_{k,0}} = \frac{1}{T_p} \frac{4 \cdot 28}{17 \cdot 25} \tau_o F(0)$$

$$(\tau_o/\theta << 1) \quad ,$$

wobei wir mit $i_s^{(0)}$ den zeitlichen Mittelwert von i_s bezeichnet haben . Hier wurde von der Zerlegung (B.6) Gebrauch gemacht und (B.7) im Limes $q \to 0$ gelöst ($V = 1$).

Bei einer Auswertung der Beziehung (C.12) zur Bestimmung von T_p muß der Beitrag der Unsicherheit der übrigen Meßgrößen zum Gesamtfehler berücksichtigt werden. Der durch eine solche Auswertung gewonnene Meßwert für T_p

$$(C.13) \qquad T_p = (98 \pm 10) \text{ ms}$$

soll daher mehr als "Richtgröße" verstanden werden . Hinzu kommt , daß infolge von Instabilitäten der Gasentladung in der Lampe die relativen Schwankungen der Pumpzeitkonstanten erst nach etwa einer Stunde Brenndauer unter der Grenze von 2% gehalten werden konnten.Mit der selben Lampe durchgeführte Vergleichsmessungen ergaben nach halbjährlicher Betriebszeit gegenüber dem Anfangswert (C.13) bis zu 50% größere optimale Pumpzeitkonstanten.

Ein Vergleich mit den Definitionen (A.27) zeigt , daß der dem Pumplicht zugeordnete Anteil unter diesen Bedingungen als kleiner Beitrag zum Relaxationsprozess angesehen werden kann . Die Pumpzeitkonstante T_p spielt dann für die

magnetischen Resonanzerscheinungen nur die Rolle eines Amplitudenparameters . Insbesondere ist aufgrund der Abschätzung (A.37) die Voraussetzung $\tau_1 = \tau_2$ auch noch für Haupt-Resonanzfrequenzen in der Größenordnung $\nu_o^{(a)} = 2$ kHz in guter Näherung erfüllt.

Die so gemessenen Werte für die dynamischen Parameter der magnetischen Resonanz im atomaren Grundzustand wurden den Digital- und Analog-Rechnungen zugrunde gelegt.

2° Höhere magnetische Wechselfeldstärken. Für höhere Wechselfeldstärken zeigt die Fig. C.6) einen Satz typischer Meßkurven , die als Analog-Aufzeichnungen des Speicherinhaltes des Mittelwertbildners nach jeweils 40 Durchgängen durch die magnetische Resonanz bei fest eingestelltem q-Wert gewonnen wurden.

Der Ordinatenmaßstab ist linear , aber in willkürlichen Einheiten wiedergegeben . Mit Hilfe von Testsignalen bekannter Spannungsamplitude kann die Ordinatenskala für eine bestimmte Dauer des Iterationszyklus und feste Durchgangszahl geeicht werden. Die Abszisse ist mit einem mittleren relativen Fehler von 0,15% den jeweils gemessenen Frequenzwerten zugeordnet . Dieser Fehler wird zum Teil durch die Analogumsetzung der Speicheradresse, vor allem aber durch die elektronische Anpassung des Analogsignals an den Kontrolleingang des Funktionsgenerators verursacht.

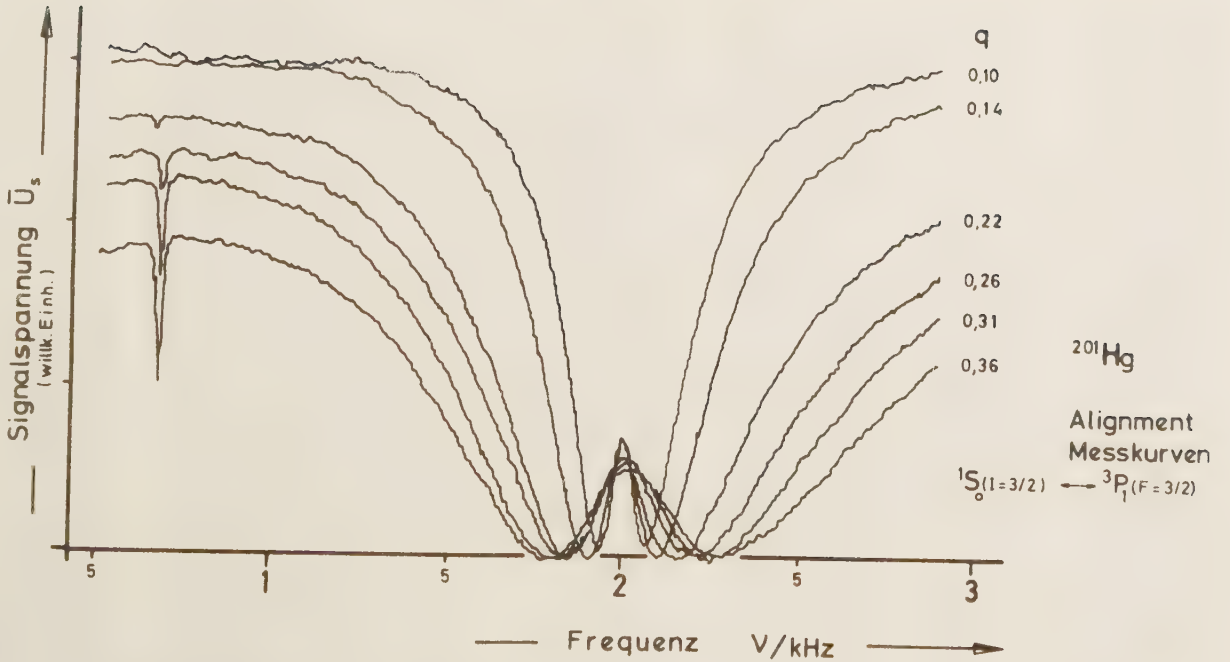
Das nach der Mittelwertbildung noch verbleibende Signal-zu-Rausch-Verhältnis kann auf Schwankungen der Pumpzeitkonstanten zurückgeführt werden . Infolge der Digitalisierung des Mittelungsprozesses beträgt das relative digitale Auflösungsvermögen für die Abszisse 0,25% (400 Adressen) und ist für die Ordinate je nach Durchgangsgeschwindigkeit [1]) und

---

[1]) Die Adressenumschaltung wird aus einem Quarz-stabilisierten Impulsgenerator abgeleitet.

Nachfolgend :

Fig. C.6) ^{201}Hg Alignment . Magnetische Resonanz im Grundzustand (Meßkurven).



40 Durchgänge Mittelwert-Bildner CAT 400/C

Durchgangszahl besser als 0,1% . Geringfügige Abweichungen von diesen Werten können bei einer Analog-Ausgabe durch Umsetzungsfehler hervorgerufen werden.

Mit steigenden Werten des Parameters q zeichnen sich in Fig. C.6) deutlich die beiden hier besonders interessierenden Merkmale der magnetischen Resonanz ab:die BLOCH-SIEGERT-Verschiebung der Haupt-Resonanzstelle und das Herauswachsen der zweiten subharmonischen Resonanz.

Der qualitative Verlauf dieser Meßkurven bestätigt die im Abschnitt B.3) dargestellten Rechnungen. Deutliche Unterschiede zwischen Messung und Rechnung ergeben sich für höhere q-Werte im unteren Frequenzbereich . Diese Abweichungen sollen kurz auf der Grundlage der im Abschnitt C.1) beschriebenen Übertragungseigenschaften des NF-Verstärkers und dem Verhalten des zeitlichen Mittelwertes $z_0^{(0)}$ gegenüber q-Wert-Schwankungen diskutiert werden.

Es zeigt sich nämlich, daß infolge einer gemischt kapazitiv-induktiven Auskopplung im Lastkreis des NF-Verstärkers eine Serienresonanz auftritt , die trotz der hohen Strom-Gegenkopplung bei konstanter Ansteuerung im unteren Frequenzbereich zu einer leichten Zunahme der Grundwelle im Feldstrom i_1 führt (relative Änderung je nach Aussteuerung kleiner als 2%) . Daraus folgt ein Anwachsen des q-Wertes und wegen der Abnahme des Betrages des zeitlichen Mittelwertes $z_0^{(0)}$ gemäß (B.8) ein Anwachsen des Gleichstromanteiles im Signalstrom i_s. Die Abgleichbedingung (C.5) ist nicht mehr im ganzen Frequenzbereich erfüllt . Die auftretende Störung wirkt im gleichen Sinne wie der magnetische Resonanzeffekt (Abnahme von $x_0^{(0)}$) [1].

Für die Gleichstromstörung $\delta i_s(q)$ folgt aus (B.8) und (C.4) für kleine Änderungen von q :

$$\delta i_s(q) = \frac{v_s}{3}\, \omega_0 \frac{16P}{5}\, m_z q\, \delta q \quad ,$$

---

[1]) Wegen (C.7) kann zur Fehlerabschätzung außerhalb der Resonanz eine im gleichen Sinne wirkende q-Abhängigkeit von $x_0^{(0)}$ unberücksichtigt bleiben.

oder bezogen auf den maximalen Betrag der Signalgröße Δi :

$$\frac{\delta i_s(q)}{\Delta_{max.} i} = \frac{4}{7} \frac{\theta}{\tau_o} m_z q^2 \frac{\delta q}{q} \quad . \tag{C.14}$$

Der prozentuale Einfluß relativer q-Wert-Schwankungen auf die Signalform zeigt eine quadratische Abhängigkeit vom eingestellten Wert des Parameters q . Soll bei den in Fig. C.6) wiedergegebenen Messungen der relative Störeinfluß etwa kleiner als 10% gehalten werden , so müßten wegen $m_z \approx 1$, $\tau_o/\theta \approx 10^{-2}$ für q = 0,4 die relativen q-Wert-Schwankungen im ganzen Frequenzbereich unterhalb von 1% bleiben.

Ausgehend von Messungen des Amplitudenganges im Feldstrom i_1 konnten mit Hilfe der Beziehung (C.14) die Differenzen zwischen rechnerischen und experimentellen Daten erklärt werden.

Für die zweite subharmonische Resonanz zeigt die Fig. C.7) eine Meßkurvenschar, die mit höherer Frequenzauflösung aufgenommen wurde. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde in dieser Darstellung die relative Lage der einzelnen Kurven in Ordinatenrichtung gegenüber den Meßwerten geändert. Die Frequenzverschiebung der zweiten subharmonischen Resonanz und die Ausbildung einer für höhere q-Werte charakteristischen Linienform treten deutlich hervor.Man erkennt den Einfluß der Digitalisierung der Frequenzskala an der Treppenstruktur der Linienflanken.

Meßreihen dieser Art wurden der numerischen Auswertung zugrunde gelegt. Dabei gestattete der Ausbau der Meßanordnung bisher allein eine Analog-Aufzeichnung des Speicherinhaltes im Mittelwertbildner.

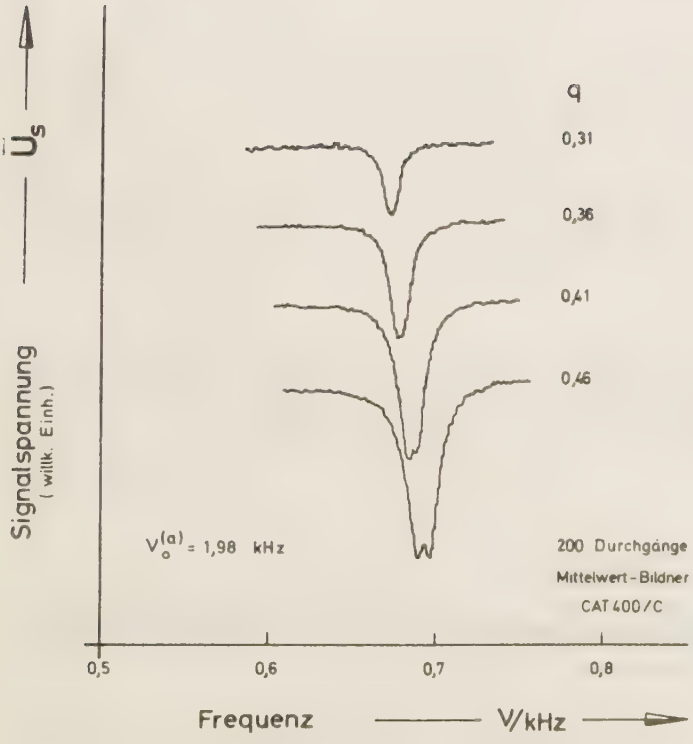


Fig. C.7) ^{201}Hg Alignment. Zweite subharmonische Resonanz im Grundzustand (Meßkurven) .

D.) Vergleich zwischen rechnerischen und experimentellen Ergebnissen.

An früherer Stelle (vergl. Abschnitt B.3)) wurde hervorgehoben , daß die BLOCH-SIEGERT-Verschiebung der Haupt-Resonanz sowie die Untersuchung von Frequenz- und Amplitudengang der zweiten subharmonischen Resonanz , soweit sie im Verhalten des zeitlichen Mittelwertes von $\mu_{2,0}(a)$ ihren Ausdruck finden , für einen Vergleich zwischen Theorie und Experiment geeignet sind . Die numerische Auswertung wurde daher vor allem im Hinblick auf diese experimentellen Daten vorgenommen.

Um sicher zu stellen , daß auch die Kinematik der Atome im angeregten Zustand durch die Rechnungen richtig wiedergegeben wird, wurden Kontrollmessungen zum Verhalten des zeitlichen Mittelwertes von $\mu_{2,0}(b)$ durchgeführt.

D.1) Kontrollmessungen zum Verhalten des zeitlichen Mittel-Wertes von $\mu_{2,0}(b)$.

In die Herleitung der Beziehung (B.7) für den Lösungsanteil $z_{0,1}$ der Tensorkomponente $\mu_{2,0}(b)$ geht auch das Verhalten der übrigen Tensorkomponenten $\mu_{2,\varkappa}(b)$ $(\varkappa \neq 0)$ des angeregten Zustandes ein. Dabei wurde die in diesen Experimenten erfüllte Bedingung einer nur schwachen Kopplung der Kinematik in Grund- und Anregungszustand vorausgesetzt.

Bei vorgegebener Resonanzfrequenz $\omega_o^{(a)}$ im Grundzustand ist die Lösung (B.7) durch das Verhältnis γ_b/γ_a und die mittlere Lebensdauer T_s des angeregten Zustandes bestimmt.

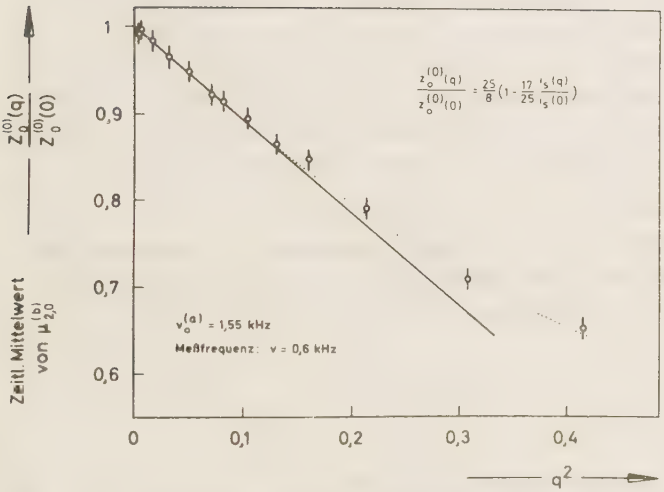


Fig. D.1) Relative Änderung des zeitlichen Mittelwertes von $\mu_{2,0}(b)$ (angeregter Zustand) als Funktion des Parameters q (— : Näherung (B.8), ··· : Analog-Rechnung, ϕ: Meßwerte gemäß (D.1)).

Für den Zusammenhang zwischen dem zeitlichen Mitterwert $z_0^{(0)}$ als Funktion des Parameters q und dem Signalstrom i_s leitet man für $\tau_0/\theta \ll 1$ aus (C.4) die außerhalb der Resonanz im Grundzustand geltende Beziehung

$$\frac{z_0^{(0)}(q)}{z_0^{(0)}(0)} = \frac{25}{8}\left[1 - \frac{17}{25}\frac{i_s(q)}{i_s(0)}\right] \tag{D.1}$$

ab . In Fig. D.1) sind mit Hilfe von (D.1) ausgewertete Messungen des Stromverhältnisses der Näherung (B.8) (ausgezogene Gerade) und Analog-Rechnungen (Punkt-Kette) für das vollständige Gleichungssystem (B.3) gegenübergestellt. Da der

angeregte Zustand in diesem Frequenzbereich kein Resonanzverhalten zeigt , konnte ein höherer Oberwellengehalt des magnetischen Wechselfeldes und damit q-Werte größer als 0,6 zugelassen werden.Die angegebenen Fehlergrenzen der Meßwerte berücksichtigen vor allem Schwankungen der Pumpzeitkonstanten T_p. Im Rahmen der Fehlergrenzen ergibt sich eine quantitative Übereinstimmung zwischen Rechnungen und Experiment.

Die Messungen stellen zugleich eine Kontrolle der auf die Führungsfeldstärke bezogenen Amplitude des magnetischen Wechselfeldes dar und bestätigen die mit der FÖRSTER-Sonde durchgeführte Absolutmessung (vergl. Abschnitt C.3)) [1].

D.2) Die Frequenzverschiebung der Haupt-Resonanz.

BLOCH und SIEGERT [15] haben am Beispiel eines Spin - 1/2 - Systems die magnetische (Haupt-) Resonanz unter dem Einfluß eines starken linear polarisierten magnetischen Wechselfeldes theoretisch untersucht. Aus ihren Formeln leitet man für die mit wachsender Wechselfeldstärke auftretende Frequenzverschiebung die Beziehung

$$\frac{\omega_o^{(a)}}{\omega_r^{(0)}} = 1 - m_o q^2 \qquad \text{(D.2)}$$

mit $m_o = 1/16$ ab,

[1]) Dieses Verfahren kann für kleine Werte des Parameters $|q|$ zur Messung einer der beiden Größen γ_b/γ_a und T_s herangezogen werden, sobald jeweils die andere bekannt ist. Abgesehen von dem Vorzug direkterer Meßverfahren ist dabei zu beachten, daß die Steigung m_z der Näherungslösung (B.8) für wachsende Feldstärken $|H_o|$ dem Grenzwert 3/2 zustrebt.

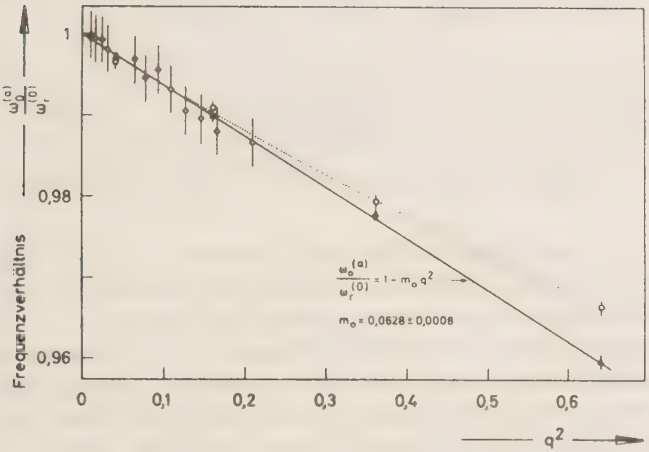


Fig. D.2) Frequenzverschiebung der Haupt-Resonanz als Funktion des Parameters q (— : Analog(◊)- und Digital(•)-Rechnungen für das System (A.26); ···:Analog-Rechnung (◊) für das System (B.3); ◊ : Meßwerte).

wobei $\omega_o^{(a)} = \gamma_a H_o$ und $\omega_r^{(0)}$ der gemessene Wert der Haupt-Resonanzfrequenz im starken Wechselfeld ist. In dem untersuchten Wertebereich des Parameters q wird auch hier für das Spin - 3/2 - System dieser Zusammenhang durch die in Fig. D.2) dargestellten Analog- und Digital-Rechnungen (ausgezogene Gerade) in der Näherung (A.26) (vergl. Abschnitt B.3)) quantitativ bestätigt. Die Fehlergrenzen des für m_o berechneten Wertes berücksichtigen die Unsicherheiten einer linearen Interpolation bei der Auswertung der digitalen Daten.

Die gute Übereinstimmung zwischen den Analog- und Digital-Rechnungen für die Näherung (A.26) entspricht der Tatsache, daß die Lage der Haupt-Resonanzfrequenz nur unwesentlich durch den Oberwellenbeitrag der Parabelmultiplizierer beeinflußt wird. Das Gleiche gilt wegen der in diesem Frequenzbereich fehlenden Resonanzeigenschaften im angeregten

Zustand für die in Fig. D.2) dargestellten Ergebnisse einer Analog-Rechnung für die Lösung des vollständigen Gleichungssystems (B.3) (Punkt-Kette) .

Die Abweichung vom Verlauf gemäß (D.2) (ausgezogene Gerade) muß daher als Einfluß der Kinematik im angeregten Zustand auf das Verhalten im Grundzustand und kann nicht als Korrektur höherer Ordnung zur BLOCH-SIEGERT-Verschiebung gedeutet werden.

Die in Fig. D.2) eingetragenen Meßwerte liefern im Rahmen ihrer durch Pumpzeitschwankungen und Unsicherheiten in der Adressen-Frequenz-Zuordnung (vergl. Abschnitt C.3)) bedingten Fehlergrenzen eine Bestätigung der BLOCH-SIEGERT-Verschiebung (D.2). Der Einfluß der Kinematik im angeregten Zustand auf diese Verschiebung konnte wegen der oben begründeten Beschränkung der einstellbaren q-Werte bisher noch nicht signifikant nachgewiesen werden [1]).

D.3) Die zweite subharmonische Resonanz.

Die subharmonischen Resonanzen werden einer Messung im Experiment aus technischen Gründen (s.u.) erst dann zugänglich , wenn mit steigenden Wechselfeldstärken die Auswirkung der stark verbreiterten Haupt-Resonanz sich bis in den Frequenzbereich der erwarteten subharmonischen Resonanz deutlich bemerkbar macht. Das subharmonische Resonanzsignal erscheint auf einem der Haupt-Resonanz zugeordneten Untergrund.

---

[1]) Vergleiche dazu vor allem den durch (C.14) beschriebenen Einfluß von q-Wert-Änderungen auf die Signalform.

Wie in der Analog-Darstellung der Bewegungsgleichungen besonders deutlich wird (vergl.Anhang II), können die strukturellen Einzelheiten der magnetischen Resonanz als Folge eines nicht-linearen Rückopplungsprinzips verstanden werden, sodaß das subharmonische Resonanzsignal nicht als additiver Beitrag zu einem unkorrelierten Untergrund aufzufassen ist. Daraus ergeben sich Schwierigkeiten für eine strenge Definition der Frequenzlage und der Strukturparameter wie Linienbreite und Amplitude der subharmonischen Resonanzen.

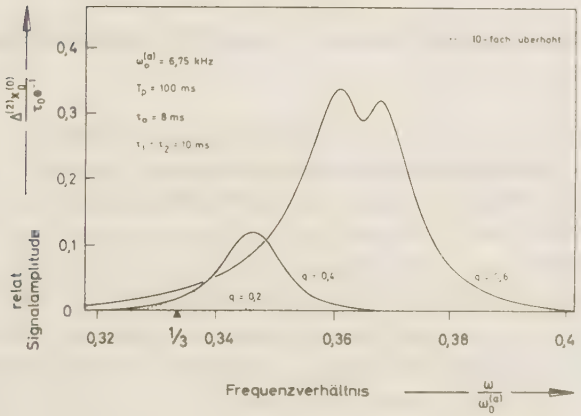


Fig. D.3) Signalformen der zweiten subharmonischen Resonanz (Digital-Rechnungen).

Bei der Auswertung der rechnerischen und experimentellen Ergebnisse wurde im Bereich der zweiten subharmonischen Resonanz die Differenz $\Delta^{(2)}x_0^{(0)}$ zwischen einem für die Haupt-Resonanz extrapolierten Signalanteil und der Funktion $x_0^{(0)}$ gebildet . In Fig. D.3) sind nach diesem Verfahren aus Digital-Rechnungen in der Näherung (A.26) erhaltene Linienformen der zweiten subharmonischen Resonanz für einige Werte des Parameters q dargestellt . Für kleinere Wechselfeldstärken

sind Amplitude und Halbwertsbreite der Resonanz gut definiert. Für $q \geq 0{,}4$ tritt die Unsymmetrie der Signalform deutlich hervor. In diesen Fällen wird als Amplitude das Maximum der Funktion $\Delta^{(2)}x_0^{(0)}(\nu)$ festgelegt und die Linienbreite für den halben Wert dieser Amplitude bestimmt. Als Resonanzstelle $\omega_r^{(2)}$ wird die auf die Halbwertsbreite bezogene Mitten-Frequenz angegeben.

D.3.1) Die Frequenzverschiebung der zweiten subharmonischen Resonanz.

Das Auftreten der zweiten subharmonischen Resonanz ist gebunden an die Erzeugung der zweiten Oberwelle (mit der Frequenz 3ν ; ν : Grundfrequenz) an den Nichtlinearitäten im Rückopplungsmechanismus (siehe auch : Analog-Darstellung). Leider tritt sowohl bei den Analog-Rechnungen als auch im Experiment diese zweite Oberwelle als systematischer Fehler auf und man erwartet , daß diese Störung sich weniger in der Frequenzlage als in Amplitude und Linienbreite der zweiten subharmonischen Resonanz bemerkbar macht.

In Fig. D.4) sind Rechnungen für den Frequenzgang der zweiten subharmonischen Resonanz (ausgezogene Gerade) wiedergegeben. Analog- und Digital-Daten stimmen im dargestellten q-Wertebereich gut überein . Unterschiedliche Ergebnisse der beiden Rechenverfahren zeigen sich erst für Parameterwerte $q \geq 0{,}6$, wobei Fehler der Parabel-Multiplizierer und Näherungsfehler in der digitalen Behandlung von (A.26) zu berücksichtigen sind. Analog-Rechnungen für das System (B.3) zeigen für größere q-Werte stärkere systematische Abweichungen im Sinne einer mit steigenden q-Werten schwächer

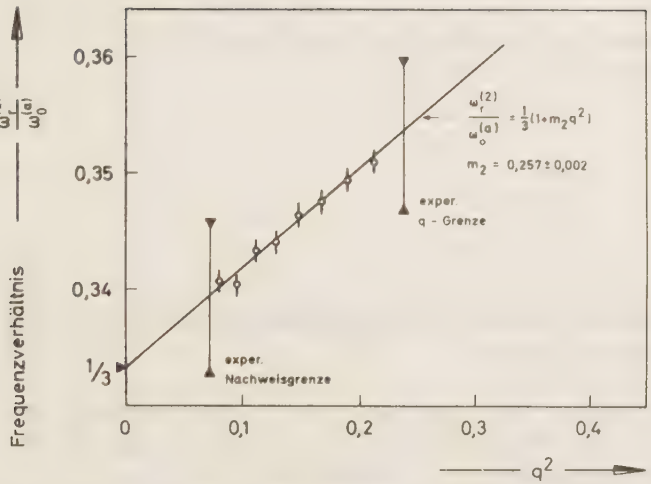


Fig. D.4) Frequenzverschiebung der zweiten subharmonischen Resonanz als Funktion des Parameters q (— : Analog- und Digital-Rechnungen; ϕ : Meßwerte).

ausgeprägten Verschiebung der Resonanzfrequenz $\omega_r^{(2)}$ [1]).

Für $|q| < 0,6$ können die Rechnungen für die Frequenzverschiebung der zweiten subharmonischen Resonanz in guter Näherung durch die Beziehung :

$$\frac{\omega_r^{(2)}}{\omega_o^{(a)}} = \frac{1}{3}\left(1 + m_2 q^2\right) \qquad \text{(D.3)}$$

mit $m_2 = 0,257 \pm 0,002$

---

[1]) Vergleiche dazu auch: Die Frequenzverschiebung der Haupt-Resonanz (Fig. D.2)).

angepaßt werden [1]). Innerhalb des experimentell beschränkten Wertebereiches für q liefern die experimentellen Ergebnisse eine Bestätigung der Beziehung (D.3).

D.3.2) Halbwertsbreite und Amplitudengang der zweiten subharmonischen Resonanz.

Die Auswertung der Rechnungen und der Meßergebnisse für das Verhalten von Halbwertsbreite und Amplitude der zweiten subharmonischen Resonanz in Abhängigkeit vom Parameter q zeigt deutlich den Einfluß des durch die Oberwellenstörung bedingten systematischen Fehlers . Die Figuren D.5) und D.6) geben einen Überblick über die rechnerischen und experimentellen Ergebnisse.

Bezüglich der Halbwertsbreite ergeben sich keine signifikanten Unterschiede in den für die Gleichungssysteme (A.26) und (B.3) durchgeführten Analog-Rechnungen. Das gleiche gilt für den Amplitudengang der zweiten subharmonischen Resonanz. Ein Einfluß der Kinematik im angeregten Zustand auf diese Strukturparameter konnte damit durch die auf diesen Frequenzbereich beschränkten Rechnungen nicht nachgewiesen werden.

Zwischen Analog- und Digital-Rechnung (letztere gelten für (A.26)) treten jedoch starke Abweichungen auf und zwar so , daß ihre Ursache qualitativ auf die Oberwellenstörung der Parabel-Multiplizierer zurückgeführt werden kann.

---

[1]) Wegen der empirischen Begründung dieses Ausdruckes wurde bewußt auf eine zu (D.2) analoge Formulierung, mit deren Hilfe eine gleich gute Anpassung hätte erreicht werden können, verzichtet.

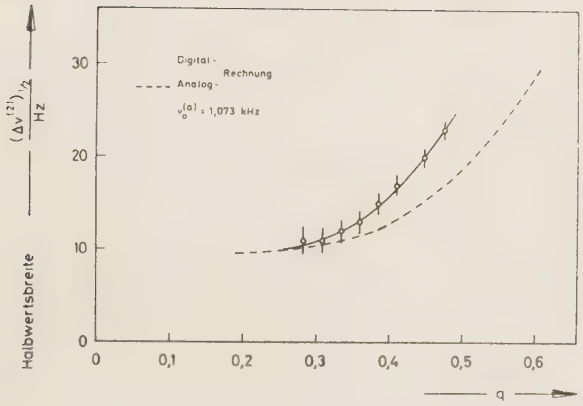


Fig. D.5) Halbwertsbreite der zweiten subharmonischen Resonanz als Funktion des Parameters q (ϕ : Meßwerte).

Ein zusätzlicher Stör-Beitrag zur zweiten Oberwelle kann pauschal als Vortäuschung eines höheren q-Wertes interpretiert werden . Das führt besonders dort zu systematischen Fehlern, wo größere Werte für die erste Ableitung der untersuchten Funktion nach dem Parameter q auftreten. Setzt man etwa in Fig. D.5) die digitale Rechnung als gute Näherung voraus, so wird ein konstanter absoluter Fehler der Parabel-Multiplizierer in der Größenordnung 10^{-3} (vergl. Fig. B.2)) mit wachsendem q stärker bewertet. Im Amplitudengang gemäß Fig. D.6) führt die Oberwellenstörung für kleine q-Werte zu sehr unterschiedlichen Ergebnissen von Digital- und Analog-Rechnung und der für höhere q-Werte eintretende Sättigungseffekt sorgt für eine Abnahme des relativen Fehlerbei-

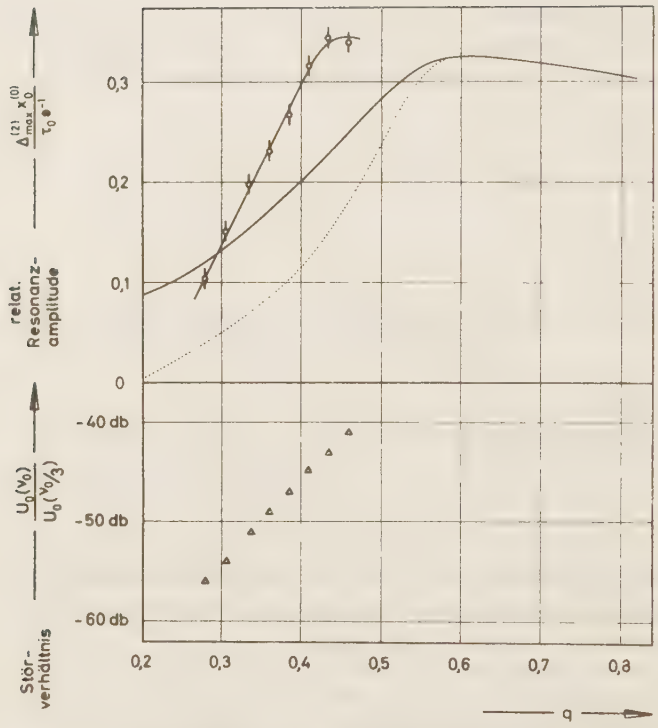


Fig. D.6) Amplitudengang der zweiten subharmonischen Resonanz und gemessenes Störverhältnis (— : Analog-Rechnungen; ··· : Digital-Rechnungen; ϕ , Δ : Meßwerte).

Für die in Fig. D.5) und D.6) eingetragenen experimentellen Werte ist zu beachten, daß die absolute Oberwellenstörung mit steigenden q-Werten stark zunimmt. In die Fig. D.6) ist eine Darstellung des für die einzelnen experimentellen Werte gemessenen Störverhältnisses aufgenommen worden . Dazu wurde mit Hilfe eines Tonfrequenz-Analysators beim Durchgang durch die zweite subharmonische Resonanz ($\nu \approx \nu_0^{(a)}/3$, $\nu_0^{(a)}$ Haupt-Resonanzfrequenz) das Amplitudenverhältnis von zweite

Oberwelle und Grundwelle gemessen und in logarithmischem Maßstab aufgetragen . Die relative Oberwellenstörung war demzufolge für die zweite subharmonische Resonanz immer kleiner als 1% . Dort, wo die relative Oberwellenstörung in die Größenordnung 10^{-3} kommt (Größenordnung für die Analog-Rechnungen) werden die Messungen der Resonanzamplitude durch die Analog-Rechnungen in etwa richtig wiedergegeben [1]).

Diese Messungen bedeuten damit nur mittelbar eine Bestätigung der Rechnungen.Aus ihnen kann eine Abschätzung der an die Meßanordnung zu stellenden Forderungen abgeleitet werden, wenn die quantitative Prüfung der theoretischen Voraussagen über die Strukturparameter der subharmonischen Resonanzen am Experiment möglich sein soll.Unter den hier diskutierten Bedingungen verlangt diese Abschätzung die Erzeugung starker magnetischer Wechselfelder ($H_1 \approx 5$ Oe) variabler Frequenz, deren relative Oberwellenstörung für die zweite Oberwelle kleiner ist als 10^{-4} (- 80 db).

---

[1]) Diese "Übereinstimmung" ist nicht zwingend: die Erzeugung von Oberwellen in den Multiplizierer-Netzwerken und ein Oberwellengehalt des magnetischen Wechselfeldes müssen nicht zu quantitativ gleichen Störungen führen.

E.) Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit werden die Erscheinungen der magnetischen Resonanz in einem atomaren Spinsystem unter der Einwirkung eines starken magnetischen Wechselfeldes untersucht. Als Beispiel wird die magnetische Resonanz im Spin-3/2-Grundzustand eines durch longitudinales optisches Pumpen ausgerichteten Systems von ^{201}Hg-Atomen gewählt.

Im theoretischen Teil werden die in einer früheren Arbeit abgeleiteten allgemeinen Bewegungsgleichungen für die Irreduzibel-Tensor-Komponenten des statistischen Operators des atomaren Systems unter speziellen Bedingungen diskutiert. Es werden Näherungsverfahren entwickelt , die die Berechnung der stationären Lösungen auch für den Fall gestatten , daß der Einfluß der Kinematik im angeregten Atomzustand auf die magnetische Resonanz im Grundzustand berücksichtigt werden muß.

Für einen speziellen , den experimentellen Bedingungen angepaßten Fall werden die aus Analog- und Digital-Rechnungen gewonnenen stationären Lösungen der Bewegungsgleichungen angegeben.Analog- und Digital-Rechnungen werden in ihren Ergebnissen untereinander verglichen . Das besondere Interesse gilt dabei den im starken, linear polarisierten magnetischen Wechselfeld auftretenden subharmonischen Resonanzen.

Im experimentellen Teil der Arbeit wird eine Meßanordnung beschrieben , mit deren Hilfe die theoretischen Voraussagen über Teilaspekte des Lösungsverhaltens im Experiment geprüft werden können . Bezüglich der Frequenzverschiebung von Haupt-Resonanz und zweiter subharmonischer Resonanz liefert die Auswertung der Meßergebnisse eine quantitative Bestätigung der Rechnungen. Bei der Untersuchung subharmonischer Resonanzen ergeben sich Schwierigkeiten bei der technischen Realisierung starker magnetischer Wechselfelder variabler Frequenz , deren relativer Oberwellengehalt für eine bestimmte Komponente kleiner als 0,01% sein sollte.

Anhang I .

9-j-Koeffizienten . Zur Spezifizierung der allgemeinen Bewegungsgleichungen auf die im Experiment gegebenen Bedingungen ist es bei der Durchführung von Umformungen zweckmäßig , die auftretenden Vektor-Kopplungs-Koeffizienten in algebraischer Form zu verwenden.

Die in (A.1) auftretenden 9-j-Koeffizienten können als Summen über 6-j-Koeffizienten dargestellt werden (vergl. etwa [25] Formel (C.41/42)). Die 6-j-Koeffizienten sind in Form einer Primfaktor-Zerlegung in dem Tabellenwerk von M. ROTENBERG u.a. [26] angegeben. Die so bestimmten Werte für die hier nicht aufgrund von Symmetriebeziehungen verschwindenden 9-j-Koeffizienten sind in Tabelle 1) zusammengestellt.

K_a	K_p	K_b	$\begin{Bmatrix} 3/2 & 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 & 3/2 \\ K_a & K_p & K_b \end{Bmatrix}$
0	1	1	$(2^{3/2}3^{3/2}5^{1/2})^{-1}$
1	0	1	$11 (2^{2}3^{2}5)^{-1}$
1	2	1	$17 (2.3^{2}5^{2})^{-1}$
2	1	1	$2 (3^{3/2}5^{3/2})^{-1}$
3	2	1	$-1 (2^{1/2}3^{1/2}5^{2})^{-1}$
0	2	2	$-1 (2^{1/2}3^{1/2}5^{3/2})^{-1}$
1	1	2	$2 (3^{3/2}5^{3/2})^{-1}$
2	0	2	$(2^{2}3^{1/2}5^{3/2})^{-1}$
2	2	2	$7^{1/2} (2.3^{1/2}5^{2})^{-1}$
3	1	2	$(2^{3/2}5^{3/2})^{-1}$
1	2	3	$-1 (2^{1/2}3^{1/2}5^{2})^{-1}$
2	1	3	$(2^{3/2}5^{3/2})^{-1}$
3	0	3	$-3^{1/2} (2^{2}5.7^{1/2})^{-1}$
3	2	3	$3 (2^{1/2}5^{2}7^{1/2})^{-1}$

Tab. 1) Tabelle der nicht verschwindenden , in (A.1) auftretenden 9-j-Koeffizienten.

Die in Tabelle 1) angegebenen Ausdrücke konnten mit Hilfe eines digitalen Rechenprogramms , das die entsprechenden Werte für die Koeffizienten als Dezimalzahlen lieferte, kontrolliert werden.

Koeffizientenmatrizen. Die Koeffizientenmatrizen der Rekursionsformeln (A.31) haben unter Verwendung der Definitionen:

$$d_k = \omega_o^{(a)} \tau_k \qquad (k = 0,1,2)$$

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_o^{(a)}}$$

$$c_n^{(o)} = \frac{id_0}{1 + id_0 n\eta}$$

$$c_n^{(\pm 1)} = \frac{id_1}{1 \pm id_1(1 - n\eta)} \quad ; \quad c_n^{(\pm 2)} = \frac{id_2}{1 \pm id_2(2 - n\eta)}$$

die Gestalt :

$$(c)_n^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} c_n^{(o)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{-n+1}^{(+1)} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} c_{n+1}^{(-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{n+2}^{(-2)} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(c)_n^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} c_n^{(o)} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} c_{-n+1}^{(+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{n+1}^{(-1)} \\ 0 & c_{-n+2}^{(+2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist :

$$(c)_n = \mathbb{1} + \frac{q}{2}(\bar{c})_n \qquad \text{mit}$$

$$(\bar{c})_n = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}c_n^{(0)} & \sqrt{2}c_n^{(0)} & 0 & 0 \\ \sqrt{2}c_{-n+1}^{(+1)} & 0 & 0 & c_{-n+1}^{(+1)} & 0 \\ \sqrt{2}c_{n+1}^{(-1)} & 0 & 0 & 0 & c_{n+1}^{(-1)} \\ 0 & c_{-n+2}^{(+2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{n+2}^{(-2)} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für die Gleichung (A.41) gilt :

$$(c)'_n = \mathbb{1} + q\,(\bar{c})_n \qquad ,$$

wobei $\mathbb{1}$ für die Einheits-Matrix geschrieben wurde.

Die Parameter d_k bestimmen die Größenordnung des Betrages der Matrixelemente.

Die Koeffizientenmatrizen (C) und (C_b) der Rekursionsformeln (A.43) sind ganz analog definiert.

Ersetzt man die Größen d_k in den Definitionen der Koeffizienten $c_n^{(\pm k)}$ durch die Größen :

$$D_k = \omega_0^{(a)} \rho_k \qquad ,$$

so erhält man Koeffizienten $C_n^{(\pm k)}$ und mit deren Hilfe nach obigem Schema die Koeffizientenmatrizen $(C)_n^{(+)}$, $(C)_n^{(-)}$, $(\bar{C})_n$, $(\bar{C})_n$ und $(C)'_n$.

Aus den Definitionen :

$$d = w_o^{(b)} T_s$$

$$C_b^{(o)} = id$$

$$C_b^{(\pm 1)} = \frac{id}{1 \pm id} \quad ; \quad C_b^{(\pm 2)} = \frac{id}{1 \pm 2id}$$

erhält man ebenso die Koeffizientenmatrizen $(C_b)^{(+)}$, $(C_b)^{(-)}$, $(\overline{C_b})$, (C_b) und $(C_b)'$, wenn man sich bei der Anordnung der $C_b^{(\pm k)}$ in obigem Schema nur nach dem oberen Index der Koeffizienten richtet und die Abhängigkeit vom Index n außer acht läßt.

Für die in den Kopplungstermen auftretenden Matrizen gilt :

$$(C_{b,a})_n = \begin{pmatrix} C_n^{(o)} & & & & \\ & C_{-n+1}^{(+1)} & & 0 & \\ & & C_{n+1}^{(-1)} & & \\ & 0 & & C_{-n+2}^{(+2)} & \\ & & & & C_{n+2}^{(-2)} \end{pmatrix}$$

$$(C_{a,b}) = \begin{pmatrix} -C_b^{(o)} & & & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \\ & 0 & & 3C_b^{(+2)} & \\ & & & & 3C_b^{(-2)} \end{pmatrix}$$

Anhang II. Zur Wirkungsweise des Analog-Netzwerkes.

Wir gehen aus von dem Prinzipschaltbild des Analog-Netzwerkes für die Bewegungsgleichungen des Grundzustandes gemäß Fig. B.1).

Mit Hilfe der Definitionen (B.3) und der Transformation (B.4) können die Parameter der Analog-Darstellung auf die dargestellten Größen selbst umgerechnet werden. Aus den im Anhang I eingeführten Definitionen folgt dann für die komplexwertige Übertragungsfunktion $V(\eta)$ eines einfachen Integrierers mit der Eingangsbewertung h_o und der Analog-Zeitkonstanten ϑ_k ($k = 0,1,2$) :

$$V_k(\eta) = - \frac{D_k}{1 + iD_k\eta} \quad .$$

$V_o(\eta)$ ist die Übertragungsfunktion des x_o-Integrierers bei Ansteuerung aus dem Multiplizierer-Netzwerk. Die übrigen Einspeisungen liefern additive Beiträge zum Ausgangssignal $-x_o$.

Wir betrachten jetzt das Verhalten der x_1, y_1-Rückopplungsschleife - bestehend aus zwei Integrierern und einem Inverter - gegenüber einer Ansteuerung aus dem Multiplizierer-Netzwerk in den y_1-Integrierer . Dabei sollen zunächst die additiven Beiträge vernachlässigt werden , die durch die übrigen Einspeisungen in diese Schleife bewirkt werden, insbesondere durch die Ankopplung an das Netzwerk für den angeregten Zustand[1]). Die von dem Multiplizierer-Netzwerk gelieferte Eingangsspannung für den y_1-Integrierer bezeichnen wir mit $U_e^{(1)}$ und das der Ausgangsgröße y_1 zugeordnete Spannungssignal mit $U_a^{(1)}$. Dann gilt für die Übertragungsfunktion :

$$V_{y_1}(\eta) = \frac{U_{a,o}^{(1)}}{U_{e,o}^{(1)}} = \frac{V_1(\eta)}{1 + V_1^2(\eta)} \quad .$$

---

[1]) Im experimentell realisierten Fall entspricht die Eingangsbewertung α einer schwachen Kopplung zwischen Grund-

Diese Übertragungsfunktion zeigt ein Resonanzverhalten. Ihr Betrag nimmt ein Maximum in der Umgebung von $\eta = 1$ an, das für gegebene Relaxationszeitkonstante θ_1 näherungsweise proportional ist zur Stärke des Führungsfeldes $\vec{H}_o$. Die gleiche Übertragungsfunktion, die allerdings der Ausgangsgröße $-x_1$ zugeordnet ist, erhält man für den Fall einer Einspeisung in den x_1-Integrierer . Ganz analoge Beziehungen ergeben sich für die x_2, y_2-Rückopplungsschleife, nur daß hier das Maximum des Betrages der Übertragungsfunktion in der Umgebung von $\eta = 2$ angenommen wird.

Anhand dieser Übertragungsfunktionen können erste Aussagen über die Resonanzerscheinungen gewonnen werden . Die quantitativen Einzelheiten werden jedoch wesentlich durch die übrigen Verkopplungen im Netzwerk , deren Einfluß im Folgenden kurz beschrieben werden soll, bestimmt.

Wir setzen voraus , daß infolge des optischen Pumpprozesses eine von Null verschiedene Anfangsbedingung P für den x_o-Integrierer vorgegeben sei . Dieser Anfangsbedingung entspricht ein Gleichspannungsanteil der Ausgangsgröße $-x_o$, der mit $q \cos \omega t$ multipliziert für $\omega = \omega_o^{(a)}$ zu einer resonanten Erregung der x_1, y_1-Schleife führt. Das Spannungssignal :

$$y_1 = |y_1| [e^{i(\omega t + \varphi_1)} + \text{c.c.}]$$

wird in einem Multiplizierer-Netzwerk nach Amplitude und Phase [1]) bewertet :

$$y_1 q \cos \omega t = \frac{q}{2} |y_1| [e^{i\varphi_1} + \text{c.c.} + e^{i(2\omega t + \varphi_1)} + \text{c.c.}]$$

---

[1]) Die Phasenbewertung spielt eine entscheidende Rolle im Hinblick auf die in den Parabelmultiplizierern auftretende Oberwellenstörung. Da diese Störungen mit einer Phase auftreten , die nicht durch die Verkopplungen im Netzwerk bestimmt ist, können in den Analogrechnungen im Bereich der subharmonischen Resonanzen sogenannte "Antiresonanzen" vorgetäuscht werden, die sich als Zunahme und nicht als Abnahme des Gleichspannungsanteiles der Signalgröße $+x_o$ ausdrücken.

und das Ergebnis dem x_o-Integrierer zugeführt. Der Gleichspannungsanteil im Produkt $y_1 q \cos \omega t$ korrigiert den Gleichspannungsanteil in $-x_o$ und der harmonische Anteil gibt Anlaß zur ersten Oberwelle in x_o. Diese erste Oberwelle in x_o liefert nach Bewertung im Multiplizierer einen Beitrag zur Grundwelle in der x_1,y_1-Schleife und bewirkt die Erregung einer zweiten Oberwelle in y_1 bzw. x_1. In dieser Weise kann der y_1-x_o-Rückopplungsprozess weiter verfolgt werden. Hinzu kommt der Einfluß der x_2,y_2-Schleife, die über Multiplizierer-Netzwerke aus der x_1,y_1-Schleife gespeist wird und auf diese und damit auf x_o zurückwirkt. Die Kopplung dieser beiden Schleifen ist symmetrisch.

Aufgrund der Multiplikation mit $\cos\omega t$ können im stationären Fall in der x_1,y_1-Schleife neben der Grundwelle nur ungeradzahlige Oberwellen und in der x_2,y_2-Schleife neben einem Gleichspannungsanteil nur geradzahlige Oberwellen auftreten.

Schließlich muß bei einer quantitativen Behandlung noch die Ankopplung an das Analog-Netzwerk für den angeregten Atomzustand berücksichtigt werden.

Anhang III. Zur Herleitung des Streulichtsignals.

Gemäß C.D. Gleichung (I.3.4) und (I.3.23) gilt für den Projektor $^{(1)}\rho_{\vec{k}}$ auf den einquantig besetzten Feldzustand zum Wellenvektor $\vec{k}$:

$$^{(1)}\rho_{\vec{k}} = |1_{\vec{k}}\rangle\langle 1_{\vec{k}}| \qquad \text{mit}$$

$$|1_{\vec{k}}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1_{\vec{k},+1}\rangle - |1_{\vec{k},-1}\rangle\right]$$

oder in einer Standard-Darstellung $\{S^2, S_k\}$ [25] zum Spin-Operator des Vektorfeldes (Polarisation) :

$$ {}^{(1)}\rho_{\vec{k}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . $$

Dabei sind Zeilen und Spalten der Matrix von oben nach unten bzw.von links nach rechts nach absteigenden Werten der Quantenzahlen $\sigma = +1,0,-1$ geordnet. Für die Darstellung der Drehung $\mathcal{R} = \mathcal{R}(-\pi/2,\pi/2,\varphi)$, die das Koordinatensystem $\sum$ in das System $\sum'$ überführt (vergl.Fig.7.4)), gilt über dem Raum der Zustände $|1,\sigma\rangle$:

$$ R^{(1)}(\varphi) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} ie^{-i\varphi} & -i\sqrt{2} & ie^{i\varphi} \\ \sqrt{2}e^{-i\varphi} & 0 & -\sqrt{2}e^{i\varphi} \\ -ie^{-i\varphi} & -i\sqrt{2} & -ie^{i\varphi} \end{pmatrix} . $$

Für den Operator ${}^{(p)}\rho_{\vec{k}}(\varphi)$, der die Polarisation im Raum der elektrischen Dipol-Feldzustände bezogen auf das Koordinatensystem $\sum$ beschreibt, folgt gemäß C.D. (I.4.13,2) :

$$ {}^{(p)}\rho_{\vec{k}}(\varphi) = R^{(1)}(\varphi)\ {}^{(1)}\rho_{\vec{k}}\ R^{(1)+}(\varphi) $$

oder die Darstellung :

$$ {}^{(p)}\rho_{\vec{k}}(\varphi) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi) & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\varphi & -\frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\varphi & 1+\cos 2\varphi & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\varphi \\ -\frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi) & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\varphi & \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi) \end{pmatrix} $$

In den hier beschriebenen Experimenten wurde die Schwingungsebene des Analysators so eingestellt, daß $\varphi = 0,\pm\pi$ gilt. Damit wird:

$$\rho^{(p)}_{\vec{k}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die von der Streulichtmeßanordnung unter idealisierten Bedingungen registrierte Streulichtintensität I_s ist proportional zur Streurate von Photonen bestimmter Polarisation in den durch $\vec{k}$ gegebenen infinitesimalen Raumwinkel. Diese Rate ist aber gemäß C.D.(II.6.13) ihrerseits proportional zum Erwartungswert des Projektors $\rho^{(p)}_{\vec{k}}$ bezüglich der durch den statistischen Operator $\rho^{(s)}$ beschriebenen Polarisationsstruktur des von den Atomen emittierten Streulichtes, sodaß :

$$I_s = c_s \frac{I_b}{\omega_s} Sp(\rho^{(s)} \rho^{(p)}_{\vec{k}})$$

mit

$$\rho^{(s)}_{K,\varkappa} = (-1)^{a+b+1+K} \hat{b}^2 \begin{Bmatrix} K & 1 & 1 \\ a & b & b \end{Bmatrix} \rho_{K,\varkappa}(b)$$

(vergl.C.D.(II.6.9)). Dabei kann in der Konstanten c_s in erster Näherung ein endlicher Öffnungswinkel des abbildenden Streulichtbündels berücksichtigt werden.

Für die Irreduzibel-Tensor-Komponenten $\rho^{(p)}_{K,\varkappa}$ von $\rho^{(p)}_{\underline{k}}$ gilt :

$$\rho^{(p)}_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \qquad \rho^{(p)}_{1,0} = \rho^{(p)}_{1,\pm 1} = 0$$

$$\rho^{(p)}_{2,0} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad , \qquad \rho^{(p)}_{2,\pm 1} = \rho^{(p)}_{2,\pm 2} = 0$$

(vergl. C.D.(II.1.4)) und damit :

$$I_s = c_s \frac{P_b}{T_s} \left[\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \rho^{(s)}_{2,0} \right] .$$

Mit a = b = 3/2, K = 2 folgt dann die Gleichung (C.2) .

Literaturverzeichnis.

[1] KASTLER,A., J.Phys.Rad. 11 (1950) p.255

[2] BROSSEL,J., Ann. de Phys. 7 (1952) p.622

[3] BARRAT,J.P., C.COHEN-TANNOUDJI, J.Phys.Rad. 22 (1961) p.392, 443

[4] COHEN-TANNOUDJI,C., Ann. de Phys. 7 (1962) p.423, 469

[5] CAGNAC,B., Ann. de Phys. 6 (1961) p. 467

[6] DODD,J.N., G.W.SERIES, Proc.Roy.Soc. 263A (1961) p.353

[7] BARRAT,J.P., Proc.Roy.Soc. 263A (1961) p.371

[8] FRANZEN,W., P.B.NEWELL, D.S.EDMONDS Jr., Phys.Rev. 170 (1968) p.17

[9] FANO,U., Rev.Mod.Phys. 29 (1957) p.74

[10] D'YAKONOV,M.I., J.Exptl.Theor.Phys. (USSR) 47 (1964) p.[illegible]
{Sov.Phys.JEPT 20 (1965) p.1484}

[11] CAPPELLER,U., L.DELLIT, Zur Darstellung des optischen Pumpprozesses im Statistischen-Operator-Formalismus. (Veröffentlichung vorbereitet.)
Siehe auch: Phys.Let. 27A (1968) p. 535

[12] MARGERIE,J., J.BROSSEL, C.R.Acad.Sc. (Paris) 241 (1955) p.[illegible]

[13] WINTER,J.M., Ann. de Phys. 4 (1959) p.745

[14] WILKING,S., Zs.Phys. 173 (1963) p.490,509

[15] BLOCH,F., A.SIEGERT, Phys.Rev. 57 (1940) p.522

[16] HACK,M.N., Phys.Rev. 104 (1956) p.84

[17] SHIRLEY,J.H., Phys.Rev. 138B (1965) p.979

[18] COHEN-TANNOUDJI,C., S.HAROCHE, C.R.Acad.Sc. (Paris) 262B (1966) p.37

[19] HAROCHE,S., Thesis (Paris, 1967)

[20] ERUGIN,N.P., Linear Systems of Ordinary Differential Equations. Academic Press, New York 1966

[21] CAPPELLER,U., L.DELLIT, Ann.Phys. 21 (1968) p.318

[22] COHEN-TANNOUDJI,C., J. de Phys. 24 (1963) p.653

[23] CAPPELLER,U., L.DELLIT, H.G.WEBER, Die numerische Lösung eines den optischen Pumpprozeß beschreibenden Differentialgleichungssystems unter besonderer Berücksichtigung der bei höheren Störfeldern auftretenden subharmonischen Resonanzen. (Institutsinterner Arbeitsbericht).

[24] BONNET,G., Nucl.Instr.& Meth. 37 (1965) p.217

[25] MESSIAH,A., Quantum Mechanics. North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1961

[26] ROTENBERG,M., R.BIVINS, N.METROPOLIS, J.K.WOOTEN Jr., The 3-j and 6-j Symbols. (MIT) Crosby Lockwood&Son LTD, London 1959

Herrn Professor Dr. W.WALCHER danke ich für das fördernde Interesse,das er dieser Arbeit entgegenbrachte. Besonderen Dank schulde ich Herrn Dozent Dr. U.CAPPELLER für die Einführung in diese Fragestellungen und die nie verwehrte Bereitschaft zur Diskussion der theoretischen Zusammenhänge. Meinem Kollegen H.G.WEBER danke ich für seine Hilfe bei der Programmierung der Digital-Rechnungen.

Lebenslauf.

Am 22. Januar 1932 wurde ich als Sohn und viertes Kind meiner Eltern,des Kaufmannes Fritz Dellit und seiner Ehefrau Anna geb.Rommel, in Kassel geboren. 1939 begann meine Schulzeit an der Bürgerschule 29 in Kassel und ich bestand 1943 die Aufnahmeprüfung am dortigen staatlichen Wilhelmsgymnasium. Kriegswirren erzwangen einen mehrmaligen Schulwechsel, ehe ich 1947 in die Kasseler Freie Waldorfschule aufgenommen wurde.Meine Schulzeit fand 1953 mit dem Abitur an der Freien Waldorfschule in Benefeld/Hannover ihren Abschluß.

Zu Beginn des Sommersemesters 1953 schrieb ich mich an der Philipps-Universität in Marburg für die Studienfächer Mathematik und Physik ein mit dem Ausbildungsziel eines Lehrers an höheren Schulen. Im Sommersemester 1956 legte ich die Diplom-Vorprüfung in Physik ab und bestand hier im Wintersemester 1961 die wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen.

Im Verlauf der Arbeit am Physikalischen Institut der Philipps-Universität konzentrierte sich mein Interesse auf Fragestellungen, die unter dem Begriff des"Optischen Pumpens" zusammengefaßt werden können. In Zusammenarbeit mit meinem Lehrer, Dr. U. Cappeller, veröffentlichte ich eine kurze Zusammenfassung der theoretischen Überlegungen in der Zeitschrift "Physics Letters" und eine Notiz zur Beobachtung subharmonischer magnetischer Resonanzen im Grundzustand von ^{201}Hg in den "Annalen der Physik"(siehe auch: Literaturverzeichnis). An der im Sommer 1968 in Warschau tagenden "International Conference on Optical Pumping and Atomic Line Shape" beteiligten wir uns mit einem Beitrag, der die Bedeutung der abgeleiteten Beziehungen anhand erster Meßdaten skizzieren sollte.